MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

pour la borne inférieure:

$$(n-2)\left\{1+\frac{n-7}{2}+\frac{(n-7)(n-14)}{2.3}+\frac{(n+7)(n-14)(n-21)}{2.3.4}+\ldots\right\}$$

pour la borne supérieure:

$$(n-2)\left\{1+\frac{n-1}{2}+\frac{(n-1)(n-2)}{2.3}+\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}+\ldots\right\}$$

Chacun de ces systèmes de caractéristiques, dont nous connaissons non seulement le nombre approché, mais que nous sommes à même de donner d'une façon presque immédiate, dès que nous avons une racine primitive de N, détermine *au moins* $\left[\frac{2^{n-1}}{3}\right]$ systèmes cycliques *différents* de triples de Steiner, systèmes qui possèdent ou uniquement le groupe cyclique $\{|x,\ 1+x|\}$ ou le sous-groupe métacyclique $\{|x, 1+x|, |x, \alpha^{2n}x|\}$, et que nous sommes à même aussi, ayant le système de caractéristiques, de donner d'une façon immédiate.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Un nouveau mode de décomposition des nombres entiers.

Dans le tome XL des mémoires de l'Académie royale de Belgique, CATALAN a fait paraître un travail intitulé: « Recherches sur quelques produits indéfinis ».

Considérons la formule (144) qui se trouve à la page 30 de ce mémoire:

$$\begin{aligned}&(1+q+q^3+q^6+\ldots)^2\\ &=(1+q^2+q^6+q^{12}+\ldots)(1+2q+2q^4+2q^9+\ldots).\end{aligned}$$

Multiplions-en les deux membres par $(1+q+q^3+q^6+\ldots)$; nous aurons:

$$\left.\begin{aligned}&(1+q+q^3+q^6+\ldots)^3\\ =&(1+q+q^3+q^6+\ldots)(1+q^2+q^6+q^{12}+\ldots)(1+2q+2q^4+2q^9+\ldots)\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{F}).$$

A la page XXXI de sa « Théorie des Nombres », Edouard LUCAS nous apprend que tout entier est la somme de trois triangulaires.

Le premier membre de la formule (F) contient donc toutes les puissances d'exposants entiers non négatifs de la variable q. Il en est alors de même du second membre. Nous en concluons le théorème suivant: *N'importe quel entier peut s'obtenir par l'addition d'un carré, et de trois triangulaires dont deux sont égaux.* Exemples:

$$16 = 16 + 0 + 0 + 0 = 9 + 1 + 3 + 3 = 4 + 10 + 1 + 1 = 4 + 6 + 3 + 3$$
$$= 4 + 0 + 6 + 6 = 1 + 15 + 0 + 0 = 1 + 3 + 6 + 6 = 0 + 10 + 3 + 3 \;;$$
$$18 = 16 + 0 + 1 + 1 = 9 + 3 + 3 + 3 = 1 + 15 + 1 + 1 = 0 + 6 + 6 + 6 \;.$$

Marcel WINANTS (Liége).

Sur le théorème de Kariya.

A propos d'un article de M. H. LEBESGUE.

1. M. H. LEBESGUE généralise, dans les numéros 5-6 de l'*Enseignement mathématique* (tome XXIII, p. 292), le théorème de KARIYA. Il l'énonce: *si S et* s *sont pôle et polaire par rapport à la conique* Σ *par rapport à laquelle deux triangles homologiques T et* t *sont polaires réciproques, le couple (S,* s*) définit des homologies qui transforment* t *(ou T) en triangles homologiques avec T (ou* t*).*

Sous cette forme le théorème est rattaché à une grande théorie: celle des pôles et polaires dans les coniques. La démonstration qu'en donne M. LEBESGUE (p. 296) peut être présentée simplement sur une conique générale. Celle que nous donnons ci-dessous nous a été enseignée par notre éminent maître, M. Cl. SERVAIS, professeur à l'Université de Gand; non pas pour justifier le théorème de Kariya mais pour établir l'existence et les propriétés des coniques conjuguées. Nous prouvons ainsi que le théorème de M. Lebesgue est un corollaire de la théorie des coniques conjuguées, étudiée par PONCELET dans le cas de l'homologie harmonique.

2. *Théorème classique.* — Deux triangles ABC, $A_1B_1C_1$ tels que les sommets A, B, C de l'un sont les pôles des côtés B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 de l'autre par rapport à une conique réelle ou idéale Σ sont dits réciproques par rapport à Σ; ils sont homologiques. Les couples B, C et B_1, C_1 peuvent être imaginaires conjugués.

En effet, soient B', C', D, E les points d'intersection de BC avec A_1C_1, A_1B_1, A_1A, B_1C_1 et F le point (AA_1 — B_1C_1). Puisque un faisceau de droites est projectif à la ponctuelle des pôles de ces droites, on a successivement

$$A_1(BCDE) \barwedge (B'C'ED) \barwedge A_1(B'C'ED) \barwedge (C_1B_1EF) \;.$$

Donc

$$(BCDE) \barwedge (B_1C_1FE)$$

et les droites BB_1, CC_1, AA_1 sont concourantes.

3. — *Coniques conjuguées. — Un point réel* S *et sa polaire* s *dans un système polaire plan* Σ *étant pris pour centre et pour axe d'une homologie dont le coefficient* λ *est donné, à tout point réel ou imaginaire* M *du plan correspond un point* M_1 *du même plan. Si* m *est la polaire du point* M *dans le système polaire* Σ, *le point* M_1 *et la droite* m *sont pôle et polaire dans un nouveau système polaire* Σ'.

En effet 1° les points M et M_1 étant correspondants dans deux figures homologiques et d'autre part le point M et la droite m étant correspondants dans deux systèmes plans réciproques, on en conclut que les systèmes plans (M_1) et (m) décrits par les éléments M_1 et m sont réciproques.

2° Si STU est un triangle autopolaire de Σ, les points S, T, U, qui correspondent à eux-mêmes dans l'homologie (S, s) ont donc pour homologues dans les systèmes réciproques superposés (M_1) et (m) les côtés opposés TU, US, ST du triangle STU. Par suite les systèmes (M_1) et (m) sont involutifs et les éléments M_1 et m sont pôle et polaire dans un nouveau système polaire Σ'.

Les coniques directrices (Σ) et (Σ'), réelles ou idéales, des systèmes polaires Σ et Σ' *sont dites conjuguées* relativement au pôle S et à la polaire s. Le couple de points TU conjugués dans Σ sont aussi conjugués dans Σ'. Ce couple étant arbitraire sur s, les systèmes polaires Σ et Σ' ont une involution de points conjugués, commune sur s. Comme s a d'ailleurs même pôle S dans les deux systèmes, *deux coniques conjuguées ont un double contact.*

4. *Théorème de M. Lebesgue.* — Si $T \equiv ABC$ et $t \equiv abc$ sont deux triangles homologiques, ils définissent un système polaire Σ dans lequel T et t sont réciproques. Si S et s sont pôle et polaire dans Σ, une homologie quelconque de centre S et d'axe s transforme T en un triangle T_1 qui est (n° 3) réciproque de t dans un système polaire Σ' et par suite (n° 2) homologique avec t.

On peut ajouter que toutes les coniques (Σ') ont, avec (Σ), un double contact réel ou idéal sur s.

Il est clair que l'on peut substituer t à T puisque ces deux triangles sont réciproques dans Σ.

Ecole des Mines de Mons, le 20 décembre 1924.

Roland Deaux.

Transformation d'une somme de carrés en développement limité ou illimité.

Considérons n nombres rationnels, entiers ou non, positifs, a', a'', a''', ..., $a^{(n)}$ et leur moyenne arithmétique A. En calculant les *écarts* par rapport à la moyenne, on obtient n nombres, les uns positifs et les autres négatifs; on démontre facilement que leur somme est nulle.

Posons

$$e = a - A\ , \qquad \text{d'où} \qquad a = A + e\ ,$$

$$a^2 = A^2 + e^2 + 2Ae\ ,$$

$$\Sigma a^2 = nA^2 + \Sigma e^2 + 2A\Sigma e\ .$$

Mais $\Sigma e = 0$, et l'égalité ci-dessus se réduit à

$$\Sigma a^2 = nA^2 + \Sigma e^2\ . \tag{1}$$

Les relations précédentes, bien connues, sont employées en Statistique; la formule 1 montre que la moyenne quadratique de n nombres est supérieure à leur moyenne arithmétique (en excluant le cas où les nombres sont égaux).

En généralisant la formule 1, on est conduit à une remarque assez curieuse qui fait l'objet de cette Note.

Désignons par a_1 les e pris en valeur absolue, par A_1 leur moyenne arithmétique, par a_2 les nouveaux écarts pris en valeur absolue, et ainsi de suite.

La formule 1 peut s'écrire

$$\Sigma a^2 = nA^2 + \Sigma a_1^2\ ,$$

et on a, d'une manière analogue,

$$\Sigma a_1^2 = nA_1^2 + \Sigma a_2^2\ ,$$

d'où

$$\Sigma a^2 = n(A^2 + A_1^2) + \Sigma a_2^2\ .$$

On voit donc apparaître une loi de formation

$$\Sigma a^2 = n\left(A^2 + A_1^2 + \ldots + A_{p-1}^2\right) + \Sigma a_p^2\ . \tag{2}$$

Si on part, par exemple, des quatre nombres 24, 40, 56, 216, et si on opère comme il a été dit, on constate que les a_5 sont tous égaux et que, par suite, les a_6 sont nuls.

$$24^2 + 40^2 + 56^2 + 216^2 = 4(84^2 + 66^2 + 33^2 + 19^2 + 11^2 + 3^2)\ .$$

Dans cet exemple le développement est *limité*; on peut se demander s'il en est toujours ainsi. Autrement dit, finit-on par obtenir, en poussant assez loin les opérations,

$$\Sigma a^2 = n\left(A^2 + A_1^2 + \ldots A_{p-1}^2\right)\ ? \tag{3}$$

Il va sans dire qu'il n'y a aucun intérêt *pratique* à remplacer une somme de quatre carrés par une somme de six carrés, comme dans l'exemple ci-dessus; si cette recherche présente quelque intérêt, il est d'ordre spéculatif.

Voici les résultats obtenus jusqu'ici; faute de place nous n'indiquons pas les démonstrations.

I. — n est un nombre entier *quelconque :*

a) le développement est *limité* si les n nombres sont égaux.
b) le développement est *illimité* si $n-1$ nombres sont égaux.

II. — n est un nombre *impair :*

le développement est *illimité*, excepté si les nombres sont égaux (voir Ia).

III. — n est un nombre *pair :*

a) les nombres forment une progression arithmétique; le développement est *limité* si n est une puissance de 2 et *illimité* dans le cas contraire.

b) le développement est *limité* si $\frac{n}{2}$ nombres sont égaux à α et si $\frac{n}{2}$ nombres sont égaux à β.

c) $n = 2$; le développement est *limité.*

d) $n = 4$; le développement est *limité*, excepté si 3 nombres sont égaux (voir I b).

e) $n = 6$; le développement est *limité*:

1º si la suite présente la forme particulière α, α, α, β, β, β (voir III b);

2º si une suite présentant cette forme apparaît au cours des calculs; on a alors $\beta = 3\alpha$; il faut que *toutes* les suites précédentes d'écarts contiennent un nombre pair de termes négatifs; la condition est nécessaire mais non suffisante.

f) $n = 6$; si la suite initiale présente la forme particulière α, β, $\alpha + \beta$, γ, δ, $\gamma + \delta$, elle engendre des suites ayant la même particularité; le développement est *illimité.*

La question est donc complètement résolue pour n impair; par contre, pour n pair elle n'est résolue que dans des cas particuliers et il ne semble pas aisé de découvrir un critère général.

Ce problème a-t-il été déjà étudié ?

Genève, 2 décembre 1924. Max HOCHSTAETTER.