NOTE SUR L'AXONOMÉTRIE ORTHOGONALE

NOTE SUR L'AXONOMÉTRIE ORTHOGONALE

PAR

P. Pasternak (Zurich).

Le procédé le plus simple pour dessiner un objet en axonométrie orthogonale me paraît être le suivant:

On choisit trois nombres entiers a, b, c qui sont entre eux comme les rapports de réduction *cos* α, *cos* β, *cos* γ des trois axes X, Y, Z.

Les directions des projections $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ des axes peuvent se construire, puisque les rapports de réduction sont déterminés par les trois équations indépendantes

$$\begin{aligned} \cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma &= a : b : c \\ \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma &= 2 \ , \end{aligned} \qquad (1)$$

d'où il suit

$$\cos\alpha = \frac{a}{e} \ , \qquad \cos\beta = \frac{b}{e} \ , \qquad \cos\gamma = \frac{c}{e} \ , \qquad e^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} \ .$$

Tenant compte que le cosinus reste inférieur à l'unité, les trois nombres choisis doivent satisfaire à cette seule condition: la somme des carrés de deux d'entre eux est toujours plus grande que le carré du troisième — condition dont l'importance se manifeste dans la construction bien connue [1] des projections des axes en partant d'un triangle dont les côtés sont proportionnels aux a^2, b^2, c^2 et reproduite dans la figure 2.

D'après les ouvrages consultés [1], il semble que la démonstration

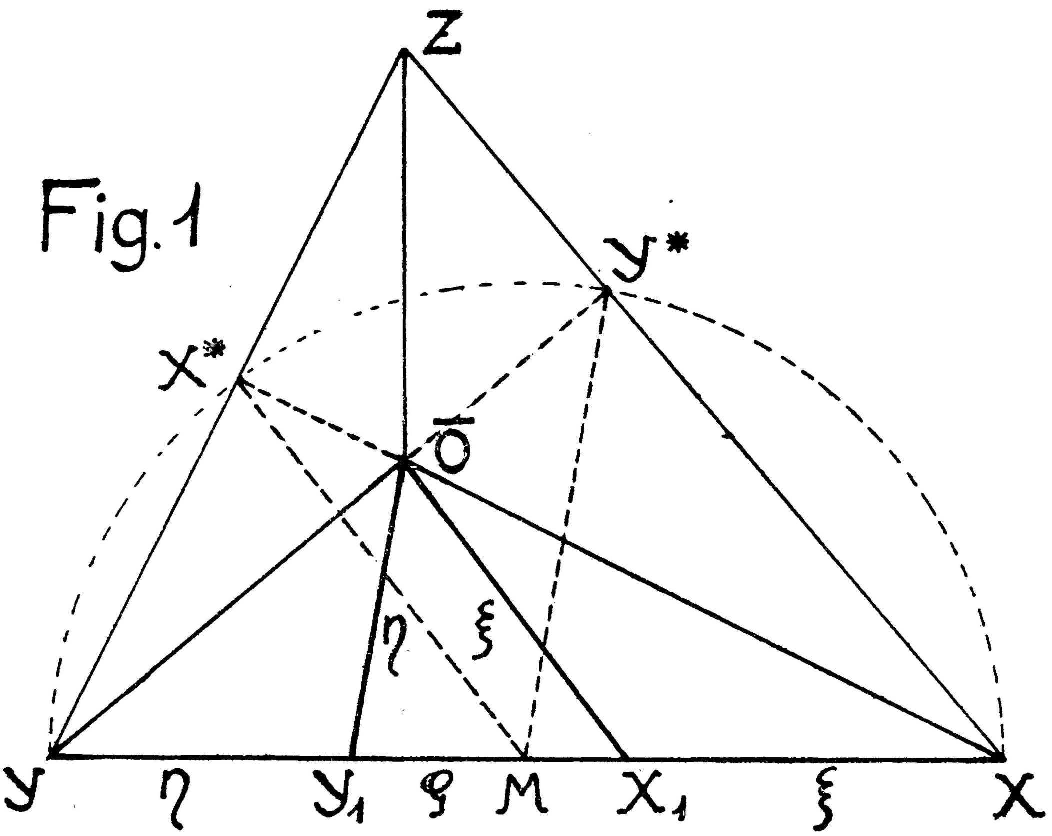
---

[1] Voir p. ex. M. Grossmann, *Darstellende Geometrie* II, Zweite Auflage, Teubner, Berlin, 1921, p. 21 et L. Kollros, *Géométrie descriptive*, Orell Fussli, Zurich, 1918, p. 31.

presque immédiate que je vais donner de la construction ci-dessous ait échappé jusqu'ici aux géomètres.

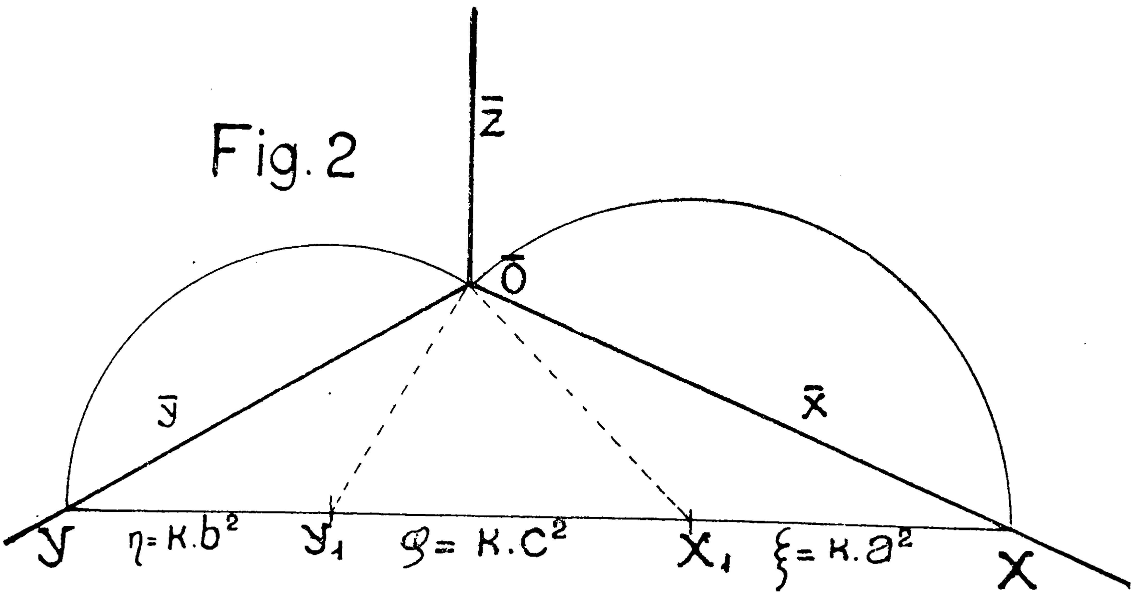
La figure 1 représente les projections orthogonales $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ des axes trirectangulaires x, y, z situés dans l'espace. Comme

Fig. 1



on le sait, ils sont les hauteurs du triangle (aigu) axonométrique XYZ, c'est-à-dire du triangle déterminé par les traces des trois axes sur le plan de dessin.

Fig. 2



Dans les plans projetants des axes x et y se trouvent les triangles rectangles OXX* et OYY* qui contiennent aux sommets X et Y les angles de pente α et β.

Lemme. — Si dans un triangle rectangle on abaisse une perpendiculaire du sommet de l'angle droit sur l'hypoténuse, le rapport d'un segment d'hypoténuse à la longueur de l'hypoténuse est égal au carré du cosinus de l'angle adjacent au segment.

Pour la démonstration, on n'a qu'à exprimer, par exemple dans le triangle OXX*, deux fois *cos* α.

$$\cos\alpha = \frac{\overline{O}X}{OX}, \qquad \cos\alpha = \frac{OX}{XX^*}.$$

Le produit nous donne le théorème énoncé.

$$\left\{\begin{array}{lll} & \cos^2\alpha = \dfrac{\overline{O}X}{XX^*} & \text{et pareillement,} \\ \text{pour l'axe des } y & \cos^2\beta = \dfrac{\overline{O}Y}{YY^*}. & \end{array}\right. \tag{2}$$

En joignant le centre M de la trace $XY = 2s$ aux points X* et Y*, on reconnaît que

$$MX^* = MY^* = s,$$

les triangles XX*Y et YY*X étant rectangles. Par $\overline{O}$ nous menons à MX* et MY* les parallèles $\xi = \overline{O}X_1$, $\eta = \overline{O}Y_1$.

En tenant compte de (2) et de la relation fondamentale de l'axonométrie orthogonale (1) on obtient les rapports:

$$\cos^2\alpha = \frac{\xi}{s}, \qquad \cos^2\beta = \frac{\eta}{s}, \qquad \cos^2\gamma = 2 - \frac{\xi}{s} - \frac{\eta}{s} = \frac{\varphi}{s}. \tag{3}$$

Les côtés ξ, η, φ du triangle $\overline{O}X_1Y_1$ satisfont donc à la condition

$$\xi : \eta : \varphi = \cos^2\alpha : \cos^2\beta : \cos^2\gamma = a^2 : b^2 : c^2. \tag{4}$$

Si enfin on remarque que dans la figure 1 on a

$$YY_1 = \eta, \qquad XX_1 = \xi, \tag{5}$$

on peut exprimer sur le triangle axonométrique XYZ le théorème suivant:

Si l'on divise un côté du triangle axonométrique en trois segments qui soient entre eux comme les carrés des rapports de réduction des axes consécutifs, les distances du point $\overline{O}$ aux points de division seront égales aux segments adjacents et latéraux de la trace.

Cette propriété du triangle axonométrique détermine inversément les projections des axes, dès que a, b, c sont donnés.

Sur une droite horizontale on reporte les longueurs $YY_1 = kb^2$, $Y_1X_1 = k.c^2$, $X_1X = ka^2$, k pris comme facteur de proportion. Puis on décrit avec Y_1 comme centre et Y_1Y comme rayon, de même avec X_1 comme centre et X_1X comme rayon deux cercles qui se coupent en $\overline{O}$.

La verticale passant par $\overline{O}$ est l'axe des z, $\overline{O}X$ et $\overline{O}Y$ sont les axes des x et y cherchés.

Ayant trouvé les axes en projection orthogonale on peut dessiner une vue axonométrique d'un objet en se passant des vrais rapports de réduction et en choisissant comme unités des coordonnées sur les axes projetés les longueurs

$$\rho a \,, \qquad \rho b \,, \qquad \rho c \,,$$

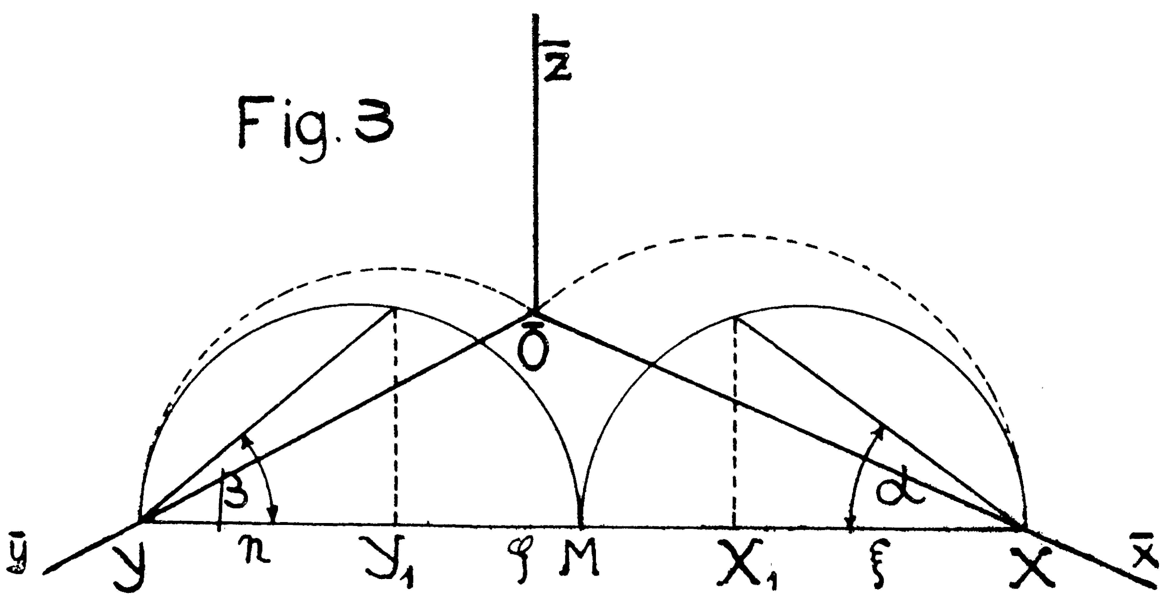
ρ étant un facteur quelconque de proportion.

La figure 3 montre la construction des axes pour le cas où *deux des trois angles de pente* sont donnés, par exemple α et β.

On dessine sur la même base avec un diamètre quelconque.

$$s = YM = MX$$

Fig. 3



deux demi-cercles adjacents et on les coupe avec les côtés des angles β et α portés sur la base en Y et X. En projetant les points d'intersection sur la base, on a de nouveau, d'après le lemme

$$\cos^2 \beta = \frac{YY_1}{s} , \qquad \cos^2 \alpha = \frac{X_1X}{s} , \qquad \cos^2 \gamma = \frac{X_1Y_1}{s} ,$$

donc, dès ce moment, la même construction que dans la fig. 2. On reconnaît par la fig. 3 que α et β doivent satisfaire à la condition $\alpha + \beta < 90°$.

A l'aide de la construction de la fig. 3 on peut trouver, aisément, dans un système d'axes donnés, *les plans formant des angles demandés avec deux des axes:* on n'a qu'à construire, avec les deux angles donnés, par exemple α et β, un triangle axonométrique auxiliaire, qui nous livre, par deux rabattements les vraies grandeurs des segments d'axes. En les reportant dans le système d'axes donné on trouve les huit plans cherchés.

Ecole polytechnique fédérale, novembre 1924.

LE CONGRÈS INTERNATIONAL DE MATHÉMATIQUES DE TORONTO

PAR

H. FEHR (Genève).

Le Congrès international de mathématiques qui vient d'avoir lieu à Toronto, du lundi 11 au samedi 16 août 1924, sous les auspices de l'Université de Toronto et de l'Institut Royal Canadien, a réuni plus de quatre cents mathématiciens. Grâce au généreux appui du Comité canadien, un grand nombre de sociétés savantes et de hautes Ecoles ont pu se faire représenter au Congrès. Dans leur voyage à travers les Etats-Unis et le Canada leurs délégués ont trouvé partout l'accueil le plus chaleureux.

Dans la *séance solennelle d'ouverture*, Monsieur le Ministre BELAND souhaita la bienvenue aux congressistes, en s'exprimant successivement, avec une égale perfection, en anglais et en français; puis vinrent les discours de Sir Robert FALCONER, président de l'Université