§ 5. Les séries de Fourier restreintes.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

de Cesàro en un point x est qu'il existe un entier k tel que si l'on pose

$$\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$$

$$\varphi_1(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(t)\,dt\;, \qquad \varphi_2(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi_1(t)\,dt\;, \ldots$$

on ait

$$\lim_{t\to 0} \varphi_k(t) = 0\;.$$

Ils ont montré en particulier que si f est bornée dans un intervalle contenant le point x, la série de Fourier est ou bien sommable au point x pour toute moyenne de Cesàro d'ordre $\delta > 0$ ou bien n'est sommable par aucune. La condition nécessaire et suffisante de sommabilité est dans ce cas: $\lim\limits_{t\to 0} \varphi_1(t) = 0$[1].

§ 5. Les séries de Fourier restreintes.

1. En général la série obtenue par dérivation terme à terme d'une série de Fourier diverge partout. Mais M. Fejér[2] a déjà établi que l'on peut encore, à l'aide des moyennes arithmétiques, remonter de la série dérivée à la dérivée de la génératrice. M. W. H. Young[3] a montré que la série dérivée terme à terme de la série de Fourier d'une fonction à variation bornée converge presque partout (G, δ), $\delta > 0$, vers la dérivée de la fonction. Plus généralement, il a établi que[4]:

a) la convergence (C, 1) de la première dérivée (formelle) d'une série de Fourier (c'est-à-dire la série obtenue par dérivation terme à terme) en un point est une propriété locale;

b) qu'il en est de même de la convergence (C, p) de la p-ième dérivée.

Il résulte de ces propositions que si, par exemple, $\dfrac{d^p f(x)}{dx^p}$ est continue et à variation bornée dans le voisinage d'un point, la p-ième dérivée de la série de Fourier de f converge (C, p) vers $\dfrac{d^p f}{dx^p}$ au point considéré.

---

[1] Hardy and Littlewood 3; M. Riesz 7. — [2] Fejér 1. — [3] W. H. Young 20. — [4] W. H. Young 31.

2. Ces résultats ont conduit M. Young à introduire sous le nom de séries de Fourier restreintes de classe p une classe de séries trigonométriques qui sans être nécessairement des séries de Fourier s'en rapprochent beaucoup par leurs propriétés et qu'il caractérise par les deux propriétés suivantes:

I. La série trigonométrique obtenue en intégrant p-fois terme à terme la série donnée (on laisse de côté le terme constant) est une série de Fourier dont nous désignerons par $F(x)$ la génératrice.

II. Dans un intervalle partiel (a, b) d'un intervalle de périodicité, $F(x)$ est l'intégrale p-uple d'une fonction $f(x)$ intégrable dans (a, b). On suppose donc que dans (a, b)

$$F(x) = \int^{x} \underset{(p)}{\cdots} \int^{x} f\,dx \ldots dx\ , \qquad f(x) = \frac{d^p F}{dx^p}\ .$$

La série trigonométrique donnée est alors appelée par M. Young une *série de Fourier de classe* p *restreinte à l'intervalle* (a, b) et $f(x)$ la fonction *associée* à cette série dans l'intervalle (a, b). La raison de cette dénomination est que dans (a, b) et relativement à la sommation de Cesàro d'ordre p une telle série a exactement les mêmes propriétés de convergence que la série de Fourier d'une fonction intégrable dans $(0,2\pi)$ et coïncidant avec $f(x)$ dans (a, b) [1].

3. Pour pouvoir donner pour une série de Fourier restreinte de classe p des critères de convergence relatifs à une sommation d'ordre $q<p$, il est nécessaire d'ajouter une hypothèse supplémentaire relative non plus seulement à l'intervalle (a, b) mais à tout l'intervalle $(0,2\pi)$. Comme hypothèse supplémentaire, M. W. H. Young ajoute la condition

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n^{p-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n^{p-1}} = 0\ .$$

Les conditions de convergence $(C, p-1)$ dans (a, b) d'une telle série sont alors les mêmes que celles de la convergence $(C, p-1)$ de la série de Fourier d'une fonction intégrable dans $(0,2\pi)$ et coïncidant avec $f(x)$ dans (a, b) [2].

[1] W. H. Young 31. — [2] W. H. Young 23, 33.

En particulier donc, si $p = 1$, nous voyons qu'une série de Fourier restreinte de classe 1, telle que $a_n \to 0$, $b_n \to 0$ jouit dans l'intervalle de restriction et relativement à la convergence ordinaire de toutes les propriétés d'une série de Fourier.

M. Young a fait de ces séries une application importante à l'étude de la convergence des séries de polynomes de Legendre[1], des séries de fonctions de Bessel[2] et de certaines séries trigonométriques non harmoniques[3]. Une autre application intéressante[4] généralise un théorème de Fatou[5] affirmant qu'une série de puissances $\Sigma a_n z^n$, telle que $a_n \to 0$, de rayon de convergence 1, converge sur le cercle de convergence en tout point de régularité de la fonction analytique engendrée par la série. Ce théorème de Fatou a été dans sa démonstration notablement simplifié par M. M. Riesz[6] qui a montré de plus que la convergence est uniforme sur un arc de régularité et qui a, en remplaçant la condition $a_n \to 0$ par la condition $\frac{a_n}{n^\delta} \to 0$ ($\delta \geqq 0$), montré que le théorème subsiste, à condition de remplacer la convergence ordinaire par la convergence (C, δ). Si $\left|\frac{a_n}{n^\delta}\right| < M$, les sommes partielles de la série restent bornées (C, δ) aux points de régularité.

§ 6. Autres procédés de sommation.

1. Il est quelquefois utile d'introduire d'autres procédés de sommation équivalents au procédé de Cesàro. C'est ainsi qu'on peut, pour les indices δ positifs entiers, définir avec Hölder[7] un procédé de sommation que MM. Knopp[8] et Schnee[9] ont montré équivalent au procédé de sommation (C, δ). Chapman[10], M. Riesz[11] et W. H. Young[12] ont étudié de tels procédés.

2. M. de la Vallée-Poussin[13] a donné un procédé nouveau pour sommer une série $\sum_0^\infty u_n$; il consiste à donner comme

---

[1] W. H. Young 29, 30. — [2] W. H. Young 35. — [3] W. H. Young 34. — [4] W. H. Young 32. — [5] Fatou 1. — [6] M. Riesz 3, 5, 6. — [7] Hölder. — [8] Knopp 1, 2, 3. — [9] Schnee; voir aussi Landau 1, 2. — [10] Chapman 1. — [11] M. Riesz 1, 2; voir aussi Hardy and Riesz 1. — [12] W. H. Young 3. — [13] Vallée-Poussin 2.