G. Valiron. – Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable. (Mémorial des Sciences mathématiques, Fascicule II.) — 1 vol. gr. in-8° de 60 pages. Prix: 10 fr. — Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1925.

Autor(en): **Buhl, A.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **24 (1924-1925)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

G. Valiron. — **Fonctions entières et fonctions méromorphes d'une variable.** (Mémorial des Sciences mathématiques, Fascicule II.) — 1 vol. gr. in-8° de 60 pages. Prix: 10 fr. — Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1925.

Après le premier fascicule dû à M. P. Appell, le Mémorial continue à être inauguré non seulement de façon brillante mais dans un esprit qui est tout particulièrement celui défini par M. Villat. Les aperçus sont immenses et ici à peu près désemcombrés de démonstrations plus ou moins pointilleuses; j'imagine que l'ouvrage de M. Valiron, pourrait être d'un prix inestimable pour le néophyte bien doué qui le prendrait pour guide en s'efforçant de rétablir toutes ces démonstrations sous-entendues; dans les cas les plus difficiles il se reporterait aux Mémoires originaux cités avec précision et abondance. Pour le savant, le fascicule remet promptement en mémoire une foule de résultats dispersés et le but du « Mémorial » est pleinement atteint.

Une condensation, tant soit peu explicative, de ce qui est déjà si bien condensé n'apparaît pas très aisée. On sait que la théorie a son origine dans un théorème publié, en 1879, par M. E. Picard, sur deux valeurs exceptionnelles qu'une fonction uniforme ne peut prendre dans le voisinage d'un point essentiel, théorème repris par MM. Borel et Hadamard. La notion de *genre* d'une fonction entière, due à Laguerre, fut fécondée par Poincaré, la décomposition en facteurs illustrée par Weierstrass et l'on reconnut bientôt que les propriétés générales de l'uniformité se manifestaient de manière particulièrement simple en la fonction entière.

Puis c'est la prodigieuse floraison. C'est, par exemple, le module $M(r)$ d'une analyticité parfois très différente de celle de $f(z)$; on étudie cependant d'abord la croissance exponentielle. C'est le thèorème de Landau, rajeuni et approfondi par A. Bloch, sur un nombre $R(c_0, c_1)$ qui décide d'un cercle de non holomorphie ou de l'absence de valeurs exceptionnelles pour une fonction définie par une série entière. Hurwitz précise, Schottky généralise encore et des domaines circulaires nous passons aux domaines sectoriels. Viennent alors deux notions d'une importance capitale: celle de *famille normale* de fonctions due à M. Montel et celle de *chemins de détermination* ou *d'indétermination*, plus ancienne peut-être mais récemment très travaillée par M. Julia. La notion d'*ordre*, due à M. Borel, permet de rassembler facilement beaucoup de propriétés des fonctions entières et méromorphes, au moins quand l'ordre est fini. Ce sont d'abord les questions de dénombrement de zéros (Jensen, Nevanlinna), la théorie de J. Hadamard sur la décomposition de Weierstrass, tout ceci étant intimément lié à la notion de genre, puis les travaux de Wiman, Lindelöf, Phragmen, etc. où réapparaissent les aires sectorielles et les chemins de détermination, poursuivant le plus souvent le point à l'infini avec des procédés d'une rare originalité et relevant plus encore du talent particulier à tel ou tel auteur que de méthodes absolument fixées.

Avec le théorème de M. Borel et l'ordre infini on voit, de mieux en mieux, l'utilité de la notion générale d'ordre; l'ordre infini éclaire les cas d'ordre fini. Le fascicule se termine avec quelques pages sur les fonctions inverses des fonctions entières ou méromorphes.

La bibliographie, naturellement riche, est faite avec beaucoup de discernement. Est-il besoin d'ajouter que les travaux de M. Valiron lui-même forment comme une charpente fondamentale ? Nul n'a oublié les *Lectures on the Theory of integral Functions* analysées récemment ici-même; nous retrouvons maintenant le sympathique auteur avec plus de faits encore et moins de démonstrations mais, précisément à cause de cela et comme nous le disions plus haut, bien dans la note du « Mémorial ».

A. Buhl (Toulouse).

P. Appell. — **Fonctions hypergéométriques de plusieurs variables, polynomes d'Hermite et autres fonctions sphériques dans l'hyperespace.** (Mémorial des Sciences mathématiques, Fascicule III). — 1 vol. gr. in-8° de 76 pages. Prix 10 fr. — Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1925.

Le premier fascicule du « Mémorial » ayant déjà été rédigé par M. P. Appell, personne ne s'étonnera qu'il en soit encore de même pour le troisième; à ce rapprochement la collection créée par M. Villat ne peut que gagner en autorité. Ici M. Appell nous livre des aperçus qui furent d'abord pour lui une œuvre de jeunesse, l'œuvre en question s'étant toutefois développée depuis près d'un demi-siècle avec l'apport de plusieurs disciples et devant même, avec la collaboration de M. Kampé de Fériet, aboutir à la prochaine publication d'un volume étendu. Le présent résumé a d'ailleurs eu un précédent en l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, ce précédent étant toutefois de rédaction notablement différente.

M. Appell définit tout de suite quatre fonctions F_i, par des séries entières à deux variables, x et y, séries qui ont une analogie immédiate avec celles correspondant au cas d'une seule variable. Ces fonctions F_i sont aussi exprimables par des intégrales doubles, de structure algébrique fort simple, qui conservent un sens hors des domaines de convergence des séries précédentes. Il y a, de même, à l'aide de la fonction gamma, des représentations des F_i par intégrales simples à variable complexe. Enfin, de même que la fonction hypergéométrique de Gauss satisfait à une équation différentielle linéaire, les F_i satisfont à des systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires et du second ordre pour lesquelles, avec quelques précautions analytiques, on peut définir des intégrales générales constructibles à partir des F_i considérées comme solutions particulières. Il y a aussi des équations *adjointes* de même type que les précédentes; le tout est abondant mais de classification fort élégante et fournit notamment l'occasion de construire de nombreuses équations identiques à leur adjointe. Nous passons ensuite à des considérations moins élémentaires mais encore plus captivantes. Les équations aux dérivées partielles vérifiées par les F_i n'ont pas, en général, des intégrales uniformes: on peut, avec M. Picard, inverser des quotients de telles intégrales et rechercher les conditions d'uniformité de ces fonctions inverses. On reconnaît l'extension d'un problème de Riemann-Fuchs et l'on arrive ainsi à des fonctions hyperfuchsiennes. La *réduction* des fonctions hypergéométriques en x, y consiste essentiellement à poser $y = f(x)$ dans les équations aux dérivées partielles précédentes d'où des équations différentielles ordinaires dites *réduites* pour certaines formes de $f(x)$; ces dernières équations ont des formes remarquables et sont ainsi intégrées hypergéométriquement. D'autre part, il y a des fonctions hypergéométriques de n variables, d'autres qui dégénèrent du côté des fonctions de Bessel, de plus des intégrales définies généralisent celles mentionnées au début, d'où les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur. Tel est ce qu'il y a d'absolument essentiel dans la première partie du fascicule. La seconde partie, bien que plus particulière au premier aspect, n'est pas moins intéressante. Il s'agit du cas où des fonctions hypergéométriques se réduisent tout simple-