NOTE DE GÉOMÉTRIE TRIANGLE ET CERCLE CIRCONSCRIT

par $N_{n-i, m-k}$. Il en résulte que la somme de ces produits est égal à $N_{n, m}$. En particulier, on obtient de cette manière l'expression de la somme des carrés des coefficients du binôme. Ces formules sont connues, on les trouve, par exemple, dans un livre de P. Bachmann [1]. La démonstration que je viens de donner est-elle nouvelle ? Je ne le crois pas, mais j'ai pensé qu'il n'était pas inutile de l'indiquer.

NOTE DE GÉOMÉTRIE
TRIANGLE ET CERCLE CIRCONSCRIT

PAR

A. AMIEL (Aix-en-Provence).

I. — On connaît le théorème suivant:

« Soient un triangle ABC et le cercle circonscrit à ce triangle. Les points de rencontre de chacun des trois côtés avec la tangente au sommet opposé sont en ligne droite. »

Ce théorème peut être généralisé ainsi:

« Soient un triangle ABC et le cercle circonscrit de centre O, de rayon R. Les rayons aboutissant aux sommets sont orientés de telle sorte que:

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = + R .$$

Sur chacun de ces rayons prenons des points A_1, B_1, C_1, tels que

$$\overline{OA_1} = \overline{OB_1} = \overline{OC_1} = K ,$$

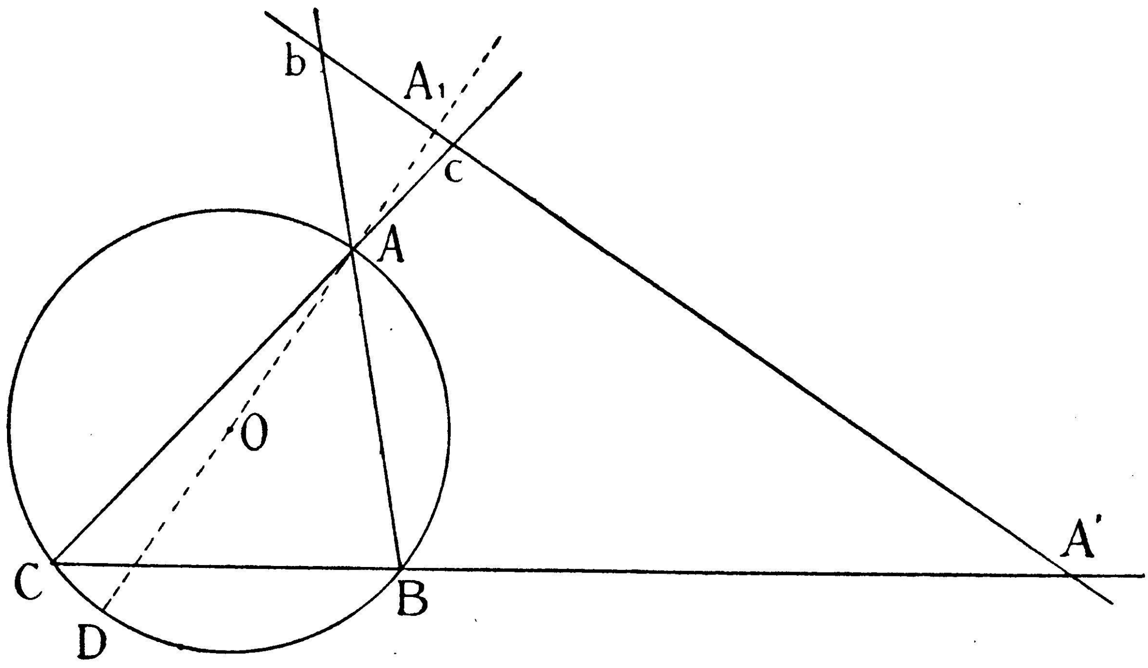
K étant un nombre algébrique quelconque.

En A_1 on mène la perpendiculaire à OA qui coupe le côté opposé au sommet A en A'; en B_1 on mène la perpendiculaire à OB qui

---

[1] P. BACHMANN, *Niedere Zahlentheorie*, II, Teubner, 1910, p. 122.

coupe le côté opposé au sommet B en B′ ; en C_1 on mène la perpendiculaire à OC qui coupe le côté opposé au sommet C en C′. Les trois points A′, B′, C′ sont en ligne droite. »



Soient b, c les points où la perpendiculaire en A_1 à OA coupe les côtés AB, AC du triangle. La droite bc perpendiculaire au diamètre OA du cercle circonscrit est l'inverse du cercle circonscrit avec A pour pôle et $\overline{AD} \times \overline{AA_1}$ pour puissance d'inversion, D étant le point diamétralement opposé à A. Donc :

$$\overline{AC} \times \overline{Ac} = \overline{AD} \times \overline{AA_1} \ , \qquad \overline{AB} \times \overline{Ab} = \overline{AD} \times \overline{AA_1} \ .$$

De là, on tire :

$$\overline{Ac} = \frac{\overline{AD} \times \overline{AA_1}}{\overline{AC}} \quad \overline{Ab} = \frac{\overline{AD} \times \overline{AA_1}}{\overline{AB}} \ . \tag{1}$$

Le théorème de Ménélaus appliqué au triangle ABC rencontré par la transversale A′cb donne :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'c}} \times \frac{\overline{cC}}{\overline{cA}} \times \frac{\overline{bA}}{\overline{bB}} = 1 \ .$$

D'où l'on tire :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{cA}}{\overline{cC}} \times \frac{\overline{bB}}{\overline{bA}} \tag{2}$$

c'est-à-dire

$$\overline{cC} = \overline{cA} + \overline{Ac} = -\frac{\overline{AD} \times \overline{AA_1}}{\overline{AC}} + \overline{Ac} ,$$

$$\overline{cC} = \frac{\overline{AC}^2 - \overline{AD} \times \overline{AA_1}}{\overline{AC}} = \frac{b^2 - \overline{AD} \times \overline{AA_1}}{\overline{AC}} .$$

De même:

$$\overline{bB} = \frac{c^2 - \overline{AD} . \overline{AA_1}}{\overline{AB}} .$$

En remplaçant dans (2) $\overline{cA}$, $\overline{bB}$, $\overline{cC}$, $\overline{bA}$ par leurs valeurs:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{c^2 - \overline{AD} . \overline{AA_1}}{b^2 - \overline{AD} . \overline{AA_1}} .$$

Mais:

$$\overline{AA_1} = \overline{OA_1} - \overline{OA} = K - R , \qquad \overline{AD} = -2R .$$

Par suite:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{c^2 + 2R^2 - 2K.R}{b^2 + 2R^2 - 2K.R} .$$

Par permutations circulaires, on obtient:

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{a^2 + 2R^2 - 2K.R}{c^2 + 2R^2 - 2K.R} , \qquad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{b^2 + 2R^2 - 2K.R}{a^2 + 2R^2 - 2K.R} .$$

D'où:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'c}} \times \frac{\overline{B'c}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{c'A}}{\overline{c'B}} = 1 ,$$

relation qui prouve que les trois points A', B', c' sont en ligne droite.

Remarque. — Les calculs précédents n'ont de sens que si $K \neq +R$. Si $K = +R$ on sait que:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{c^2}{b^2} , \qquad \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{a^2}{c^2} , \qquad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{b^2}{a^2} .$$

Corollaire I. — Prenons $K=+R$. On trouve précisément le théorème dont la généralisation est l'objet de cette note.

Corollaire II. — Prenons K=0. On a le théorème:

Les projections du centre du cercle circonscrit à un triangle sur chaque côté parallèlement à la tangente au sommet opposé sont trois points en ligne droite.

Corollaire III. — Prenons K = — R. On a le théorème:

Soient un triangle et le cercle circonscrit à ce triangle. Les points de rencontre de chacun des trois côtés avec la tangente au point diamétralement opposé au sommet opposé sont en ligne droite.

II. — Dans le N° du 15 mars 1904 de *L'Enseignement mathématique*, t. VI, p. 130-132, M. J. Kariya (Tokio) énonce la proposition suivante:

« Inscrivons un cercle O dans un triangle donné ABC; nommons respectivement X, Y, Z les points de contact avec les trois côtés, BC, CA, AB. Si l'on prend sur les droites OX, OY, OZ des points D, E, F également distants du point O, les trois droites AD, BE, CF concourent en un même point. »

Ce théorème a donné lieu à plusieurs lettres et communications dont le résumé se trouve dans le numéro suivant (p. 236-239, mai 1904).

Sa démonstration se déduit immédiatement du théorème précédent en transformant par figures polaires réciproques; il suffit de transformer la figure par rapport au cercle circonscrit et l'on obtient pour théorème corrélatif précisément celui de M. Kariya.