

NOTE DE GÉOMÉTRIE TRIANGLE ET CERCLE CIRCONSCRIT

Autor(en): **Amiel, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1923)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-19740>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

par $N_{n-i, m-k}$. Il en résulte que la somme de ces produits est égal à $N_{n, m}$. En particulier, on obtient de cette manière l'expression de la somme des carrés des coefficients du binôme. Ces formules sont connues, on les trouve, par exemple, dans un livre de P. Bachmann¹. La démonstration que je viens de donner est-elle nouvelle ? Je ne le crois pas, mais j'ai pensé qu'il n'était pas inutile de l'indiquer.

NOTE DE GÉOMÉTRIE
TRIANGLE ET CERCLE CIRCONSCRIT

PAR

A. AMIEL (Aix-en-Provence).

I. — On connaît le théorème suivant :

« Soient un triangle ABC et le cercle circonscrit à ce triangle. Les points de rencontre de chacun des trois côtés avec la tangente au sommet opposé sont en ligne droite. »

Ce théorème peut être généralisé ainsi :

« Soient un triangle ABC et le cercle circonscrit de centre O, de rayon R. Les rayons aboutissant aux sommets sont orientés de telle sorte que :

$$\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = + R .$$

Sur chacun de ces rayons prenons des points A_1, B_1, C_1 , tels que

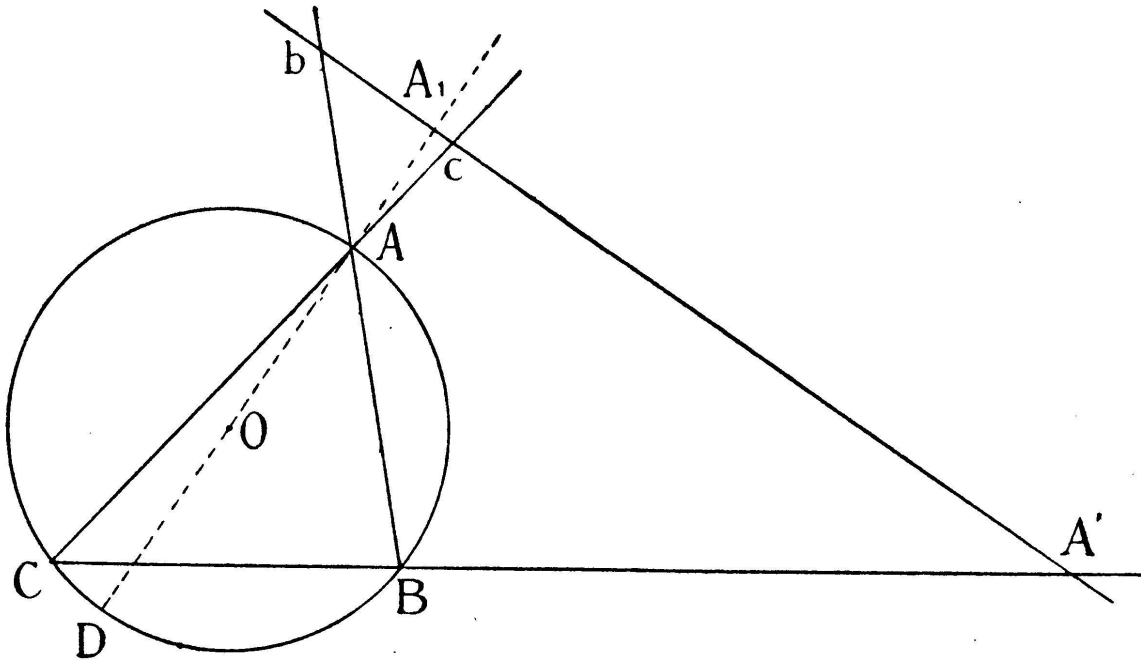
$$\overline{OA_1} = \overline{OB_1} = \overline{OC_1} = K ,$$

K étant un nombre algébrique quelconque.

En A_1 , on mène la perpendiculaire à OA qui coupe le côté opposé au sommet A en A' ; en B_1 , on mène la perpendiculaire à OB qui

¹ P. BACHMANN, *Niedere Zahlentheorie*, II, Teubner, 1910, p. 122.

coupe le côté opposé au sommet B en B'; en C₁ on mène la perpendiculaire à OC qui coupe le côté opposé au sommet C en C'. Les trois points A', B', C' sont en ligne droite. »



Soient b, c les points où la perpendiculaire en A_1 à OA coupe les côtés AB, AC du triangle. La droite bc perpendiculaire au diamètre OA du cercle circonscrit est l'inverse du cercle circonscrit avec A pour pôle et $\overline{AD} \times \overline{AA_1}$ pour puissance d'inversion, D étant le point diamétralement opposé à A . Donc :

$$\overline{AC} \times \overline{Ac} = \overline{AD} \times \overline{AA_1}, \quad \overline{AB} \times \overline{Ab} = \overline{AD} \times \overline{AA_1}.$$

De là, on tire :

$$\overline{Ac} = \frac{\overline{AD} \times \overline{AA_1}}{\overline{AC}} \quad \overline{Ab} = \frac{\overline{AD} \times \overline{AA_1}}{\overline{AB}}. \quad (1)$$

Le théorème de Ménélaus appliqué au triangle ABC rencontré par la transversale $A'cb$ donne :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'c}} \times \frac{\overline{cC}}{\overline{cA}} \times \frac{\overline{bA}}{\overline{bB}} = 1.$$

D'où l'on tire :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{\overline{cA}}{\overline{cC}} \times \frac{\overline{bB}}{\overline{bA}} \quad (2)$$

c'est-à-dire

$$\overline{cC} = \overline{cA} + \overline{Ac} = -\frac{\overline{AD} \times \overline{AA_1}}{\overline{AC}} + \overline{Ac} ,$$

$$\overline{cC} = \frac{\overline{AC}^2 - \overline{AD} \times \overline{AA_1}}{\overline{AC}} = \frac{b^2 - \overline{AD} \times \overline{AA_1}}{\overline{AC}} .$$

De même:

$$\overline{bB} = \frac{c^2 - \overline{AD} \cdot \overline{AA_1}}{\overline{AB}} .$$

En remplaçant dans (2) \overline{cA} , \overline{bB} , \overline{cC} , \overline{bA} par leurs valeurs:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{c^2 - \overline{AD} \cdot \overline{AA_1}}{b^2 - \overline{AD} \cdot \overline{AA_1}} .$$

Mais:

$$\overline{AA_1} = \overline{OA_1} - \overline{OA} = K - R , \quad \overline{AD} = -2R .$$

Par suite:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{c^2 + 2R^2 - 2K.R}{b^2 + 2R^2 - 2K.R} .$$

Par permutations circulaires, on obtient:

$$\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{a^2 + 2R^2 - 2K.R}{c^2 + 2R^2 - 2K.R} , \quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{b^2 + 2R^2 - 2K.R}{a^2 + 2R^2 - 2K.R} .$$

D'où:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'c}} \times \frac{\overline{B'c}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{c'A}}{\overline{c'B}} = 1 ,$$

relation qui prouve que les trois points A' , B' , c' sont en ligne droite.

Remarque. — Les calculs précédents n'ont de sens que si $K \neq +R$. Si $K = +R$ on sait que:

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} = \frac{c^2}{b^2} , \quad \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} = \frac{a^2}{c^2} , \quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = \frac{b^2}{a^2} .$$

Corollaire I. — Prenons $K = +R$. On trouve précisément le théorème dont la généralisation est l'objet de cette note.

Corollaire II. — Prenons $K=0$. On a le théorème:

Les projections du centre du cercle circonscrit à un triangle sur chaque côté parallèlement à la tangente au sommet opposé sont trois points en ligne droite.

Corollaire III. — Prenons $K=-R$. On a le théorème:

Soient un triangle et le cercle circonscrit à ce triangle. Les points de rencontre de chacun des trois côtés avec la tangente au point diamétralement opposé au sommet opposé sont en ligne droite.

II. — Dans le N° du 15 mars 1904 de *L'Enseignement mathématique*, t. VI, p. 130-132, M. J. KARIYA (Tokio) énonce la proposition suivante:

« Inscrivons un cercle O dans un triangle donné ABC ; nommons respectivement X, Y, Z les points de contact avec les trois côtés, BC, CA, AB . Si l'on prend sur les droites OX, OY, OZ des points D, E, F également distants du point O , les trois droites AD, BE, CF concourent en un même point. »

Ce théorème a donné lieu à plusieurs lettres et communications dont le résumé se trouve dans le numéro suivant (p. 236-239, mai 1904).

Sa démonstration se déduit immédiatement du théorème précédent en transformant par figures polaires réciproques; il suffit de transformer la figure par rapport au cercle circonscrit et l'on obtient pour théorème corrélatif précisément celui de M. Kariya.
