SUR LES INVARIANTS D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE

Autor(en): **Peyovitch, Tadia**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1923)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-19737

SUR
LES INVARIANTS D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU PREMIER ORDRE

PAR

M. Tadia PEYOVITCH (Belgrade).

---

1. — Il peut arriver qu'une équation différentielle d'une certaine forme conserve la même forme pour des changements de fonction et de variable contenant des fonctions indéterminées. Il est alors de la plus grande importance de former les fonctions des coefficients de l'équation et de leurs dérivées qui restent inaltérées dans ces changements, c'est-à-dire *les invariants de l'équation.* La théorie des invariants des équations différentielles linéaires est étudiée par Laguerre[1], Brioschi[2] et Halphen[3]. MM. Roger Liouville[4] et Appell[5] ont étudiés à différents points de vues les invariants de l'équation

$$\frac{dy}{dx} = e_0 + 3e_1 y + 3e_2 y^2 + e_3 y^3 .$$

Nous nous proposons, dans le présent travail, l'étude des invariants de l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a_2 y^2 + 2a_1 y \frac{dy}{dx} + a_0 = 0 , \tag{1}$$

qui conserve la même forme, comme nous avons vu dans notre thèse de doctorat[6], quand on choisit une nouvelle fonction η

---

[1] *Comptes rendus*; t. LXXXVIII, pp. 116 et 224.
[2] *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. VII, p. 105.
[3] *Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences*; t. XXVIII, n° 1.
[4] *Comptes rendus*; 6 septembre 1886; 12 septembre 1887.
[5] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, p. 361, 1889.
[6] Nouveaux cas d'intégrabilité d'une équation différentielle importante. (*Glas Srpske Kraljevske Akademie*; t. CIX. 1923, en serbe).

et une nouvelle variable indépendante ξ liées à y et x par les relations

$$y = u_{(x)}\eta\ , \qquad \frac{d\xi}{dx} = v_{(x)}\ ;$$

les coefficients a_0, a_1, a_2, étant des fonctions de la variable indépendante x. Quelques-uns des résultats contenus dans ce mémoire se trouvent indiqués dans notre thèse; mais dans ce travail nous voulons approfondir la *théorie des invariants de l'équation* (1).

Pour les invariants absolus, invariants relatifs et semi-invariants nous avons adopté les définitions de Halphen (loc. cit.).

2. — Posons, dans l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a_2 y^2 + 2a_1 y\frac{dy}{dx} + a_0 = 0 \tag{1}$$

$$y = \lambda\eta\ , \qquad x = \lambda\xi\ ,$$

où λ est une constante; l'équation (1) deviendra

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + \alpha_2\eta^2 + 2\alpha_1\eta\frac{d\eta}{d\xi} + \alpha_0 = 0\ ,$$

où

$$\alpha_0 = a_0\ , \qquad \alpha_1 = \lambda a_1\ , \qquad \alpha_2 = \lambda^2 a_2\ ;$$

c'est ce qui nous conduit à attribuer au coefficient a_i *le poids* i. On a de plus

$$\frac{d\alpha_i}{d\xi} = \lambda^{i+1}\frac{da_i}{dx}\ , \qquad \frac{d^2\alpha_i}{d\xi^2} = \lambda^{i+2}\frac{d^2a_i}{dx^2}\ ,$$

ce qui conduit à attribuer à la dérivée $\frac{d^k a_i}{dx^k}$ *le poids* $(i+k)$.

Il est possible, par des quadratures, de ramener l'équation (1) à une forme canonique ne contenant plus qu'un *invariant absolu*. Pour opérer cette réduction, faisons le changement de fonction

$$y = \mathrm{U}_{(x)}\mathrm{Y}\ ,$$

et déterminons la fonction $\mathrm{U}_{(x)}$ de façon que la nouvelle équation différentielle ne contienne pas le terme en $\mathrm{Y}\frac{d\mathrm{Y}}{dx}$.

Nous aurons

$$U_{(x)} = e^{\int a_1 dx},$$

et l'équation prendra la forme

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)^2 + (a_2 - a_1^2)\,Y^2 = -\frac{a_0}{U^2}.$$

Enfin, faisons un changement de variable indépendante

$$\frac{dX}{dx} = M(x)$$

et déterminons $M_{(x)}$ de façon que le coefficient de Y^2 devienne l'unité, on aura

$$M(x) = \sqrt{a_2 - a_1^2},$$

et l'équation prendra *la forme canonique*

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y^2 = H(X), \tag{α}$$

où

$$H = -\frac{a_0}{M^2 U^2}.$$

Les fonctions U et M sont des *invariants relatifs*, H et X des *invariants absolus* pour toutes les transformations de la forme

$$y = u_{(x)}\eta, \qquad \frac{d\xi}{dx} = v_{(x)}. \tag{2}$$

Pour le vérifier, nous faisons dans l'équation (1) le changement (2) de fonction et de variable; l'équation prendra la forme

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + \alpha_2\eta^2 + 2\alpha_1\eta\frac{d\eta}{d\xi} + \alpha_0 = 0,$$

où

$$\alpha_0 = \frac{a_0}{u^2 v^2}, \qquad \alpha_1 = \frac{u' + a_1 u}{uv}, \qquad \alpha_2 = \frac{u'^2 + 2a_1 uu' + a_2 u^2}{u^2 v^2}, \tag{3}$$

u' désigne la dérivée $\frac{du}{dx}$.

Si nous appelons U_0, M_0, H_0, X_0 les fonctions composées avec les coefficients α_0, α_1, α_2 et la variable ξ, comme U, M, H, X le sont avec a_0, a_1, a_2 et la variable x, nous aurons

$$U_0 = e^{-\int \alpha_1 d\xi}, \qquad M_0 = \sqrt{\alpha_2 - \alpha_1^2}.$$

En remplaçant α_0, α_1, α_2 par les valeurs (3) et $d\xi$ par $v dx$, on vérifie que l'on a

$$U_0 = \frac{1}{u} U, \qquad M_0 = \frac{1}{v} M ; \tag{4}$$

d'où

$$\left.\begin{aligned} H_0 &= - \frac{\alpha_0}{M_0^2 U_0^2} = - \frac{a_0}{M^2 U^2} = H, \\ X_0 &= \int M_0 d\xi = \int M dx = X. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Les équations (4) et (5) montrent que U et M sont des *invariants relatifs*, H et X des *invariants absolus.*

Remarque. L'introduction du facteur constant k^2 dans H donne, d'ailleurs, des équations canoniques qui se déduisent les unes des autres. Posons

$$H_1 = k^2 H ,$$

on aura

$$dX_1 = dX . \qquad \text{d'où} \qquad X_1 = X + h ,$$

h désignant une nouvelle constante. L'équation canonique correspondante

$$\left(\frac{dY_1}{dX_1}\right)^2 + Y_1^2 = H_1$$

se ramène à la forme

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y^2 = H$$

par la substitution

$$Y_1 = kY , \qquad X_1 = X + h .$$

3. — Les dérivées $\frac{dH}{dY}$, $\frac{d^2 H}{dX^2}$, ... sont des *invariants absolus* qui se calculent facilement, par voie récurrente, en fonctions des coefficients a_0, a_1, a_2. En effet, partons des formules

$$H = - \frac{a_0}{M^2 U^2}, \quad \frac{dX}{dx} = M_{(x)}, \quad U_{(x)} = e^{-\int a_1 dx}, \quad M_{(x)} = \sqrt{a_2 - a_1^2},$$

nous trouverons

$$\frac{dH}{dX} = \frac{\frac{dH}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = - \frac{p_4}{M^4 U^2}, \qquad \frac{d^2 H}{dX^2} = - \frac{p_6}{M^6 U^2},$$

en général

$$\frac{d^n \mathrm{H}}{d\mathrm{X}^n} = - \frac{p_{2n+2}}{\mathrm{M}^{2n+2}\,\mathrm{U}^2}\,, \tag{6}$$

où p_4, p_6, ..., p_{2n+2} sont des *invariants relatifs* donnés par la formule récurrente

$$p_{2n+2} = \mathrm{M}\frac{dp_{2n}}{dx} - 2p_{2n}\left(n\frac{d\mathrm{M}}{dx} - a_1 \mathrm{M}\right)\;;$$

par exemple, p_4 a la valeur (pour $n = 1$)

$$p_4 = \mathrm{M}\frac{da_0}{dx} - 2a_0\left(\frac{d\mathrm{M}}{dx} - a_1 \mathrm{M}\right)\;; \qquad (p_2 = a_0)\;.$$

Les indices 4, 6, ..., $2n + 2$ désignent les *poids* des invariants.

Les invariants absolus H, $\mathrm{H}' = \frac{d\mathrm{H}}{dx}$ et X sont des fonctions de x que nous avons calculées; l'élimination de x fournira entre H et X ou entre H et H′ une relation caractéristique de l'équation différentielle considérée. Inversement, étant donnée une relation entre H et X, ou mieux une relation entre H et H′, que l'on peut toujours déduire par différentiation d'une relation entre H et X, on aura, comme il suit, la relation correspondante entre les coefficients a_0, a_1, a_2 et leurs dérivées par rapport à x.

Soit

$$f(\mathrm{H}, \mathrm{H}') = 0 \tag{7}$$

l'équation donnée, on aura, après différentiation,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{H}}\mathrm{H}' + \frac{\partial f}{\partial \mathrm{H}'}\mathrm{H}'' = 0\;. \tag{8}$$

D'autre part, les expressions (6) pour H, H′, H″ donnent

$$\frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}} = \frac{p_4}{a_0\,\mathrm{M}^2}\,, \qquad \frac{\mathrm{H}''}{\mathrm{H}'} = \frac{p_6}{p_4\,\mathrm{M}^2}\;. \tag{9}$$

L'élimination de H, H′, H″ entre ces quatre équations (7), (8), (9) fournira la *condition cherchée* sous forme d'une relation entre les deux *invariants absolus* $\frac{p_4}{a_0\,\mathrm{M}^2}$ et $\frac{p_6}{p_4\,\mathrm{M}^2}$

$$\Psi\left(\frac{p_4}{a_0\,\mathrm{M}^2}\,, \frac{p_6}{p_4\,\mathrm{M}^2}\right) = 0\;. \tag{10}$$

Cette condition (10) est donc *nécessaire* pour que H et H′ soient liés par la relation (7); elle est *suffisante.* Pour le démontrer nous pouvons toujours supposer la relation (7) entre H et H′ mise sous la forme

$$H = \varphi\left(\frac{H'}{H}\right), \tag{7'}$$

d'où, en prenant les dérivées logarithmiques des deux membres par rapport à X

$$\frac{H'}{H} = \frac{\varphi'\left(\frac{H'}{H}\right)}{\varphi\left(\frac{H'}{H}\right)}\left[\frac{H''}{H} - \frac{H'^2}{H^2}\right];$$

en divisant par $\frac{H'}{H}$, nous aurons la *relation cherchée* entre les invariants $\frac{H'}{H}$, $\frac{H''}{H'}$ sous la forme

$$1 = \frac{\varphi'\left(\frac{p_4}{a_0 M^2}\right)}{\varphi\left(\frac{p_4}{a_0 M^2}\right)}\left[\frac{p_6}{p_4 M^2} - \frac{p_4}{a_0 M^2}\right], \tag{10'}$$

après la substitution $\frac{H'}{H}$, $\frac{H''}{H'}$ par leurs valeurs de (6); cette relation (10′) remplace la condition (10).

Supposons maintenant que, pour l'équation différentielle (1), les coefficients a_0, a_1, a_2 vérifient cette condition (10′); appelons H_1 l'invariant absolu de cette équation, X_1 la variable canonique et H_1', H_1'' les dérivées de H_1 par rapport à X_1. On aura

$$\frac{p_4}{a_0 M^2} = \frac{H_1'}{H_1}; \qquad \frac{p_6}{p_4 M^2} = \frac{H_1''}{H_1'},$$

et la condition (10′) pourra s'écrire, après qu'on aura multiplié les deux membres par $\frac{H_1'}{H_1}$,

$$\frac{H_1'}{H_1} = \frac{\varphi'\left(\frac{H_1'}{H_1}\right)}{\varphi\left(\frac{H_1'}{H_1}\right)}\left[\frac{H_1''}{H_1} - \frac{H_1'^2}{H_1^2}\right];$$

d'où, en intégrant et désignant par k^2 une constante arbitraire,

$$\mathrm{H}_1 = k^2 \varphi\left(\frac{\mathrm{H}_1'}{\mathrm{H}_1}\right) .$$

On pourra toujours amener cette constante k à être l'unité, de façon à amener cette dernière relation à prendre la forme (7'). En effet, en faisant dans la dernière relation

$$\mathrm{H}_1 = k^2 \mathrm{H} \ , \qquad \mathrm{X}_1 = \mathrm{X} + h \ ,$$

cette relation se réduira à la relation (7').

La condition (10) *ou* (10') *est donc nécessaire et suffisante pour que* H et H' *soient liés par relation* (7) *ou* (7').

Remarquons que, si l'on voulait trouver la forme canonique correspondant à une relation donnée

$$\Psi\left(\frac{p_4}{a_0 \mathrm{M}^2}, \frac{p_6}{p_4 \mathrm{M}^2}\right) = 0$$

entre les deux invariants absolus $\frac{p_4}{a_0 \mathrm{M}^2}$, $\frac{p_6}{p_4 \mathrm{M}^2}$, on aurait à intégrer l'équation

$$\Psi\left(\frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}}, \frac{\mathrm{H}''}{\mathrm{H}'}\right) = 0 \ .$$

Si, dans cette équation, on remplace H'' par sa valeur

$$\mathrm{H}'' = \frac{d\mathrm{H}'}{d\mathrm{X}} = \mathrm{H}' \frac{d\mathrm{H}'}{d\mathrm{H}} \ ,$$

elle se transforme en une équation homogène en H' et H

$$\Psi\left(\frac{\mathrm{H}'}{\mathrm{H}}, \frac{d\mathrm{H}'}{d\mathrm{H}}\right) = 0$$

intégrable par les méthodes élémentaires.

Exemples. 1° Cherchons la relation nécessaire et suffisante pour que l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a_2 y^2 + 2a_1 y \frac{dy}{dx} + a_0 = 0$$

puisse être ramenée à la forme canonique

$$\left(\frac{d\mathrm{Y}}{d\mathrm{X}}\right)^2 + \mathrm{Y}^2 = \mathrm{X}^2 \ .$$

On devra avoir

$$H = X^2 \ ,$$

d'où

$$H' = 2X \ , \qquad H'' = 2$$

et

$$H'^2 = 4H \ .$$

Alors les équations

$$\frac{p_4}{a_0 M^2} = \frac{H'}{H} \ , \qquad \frac{p_6}{p_4 M^2} = \frac{H''}{H'}$$

donnent, en remplaçant H et H″ par leurs valeurs $\frac{H'^2}{4}$ et 2 et en éliminant H′, la condition cherchée

$$p_4^2 - 2a_0 p_6 = 0$$

nécessaire et suffisante.

Comme on a

$$\frac{d^3 H}{dX^3} = - \frac{p_8}{M^8 U^2} \ ,$$

la condition $p_8 = 0$ avec $p_6 \gtrless 0$ est aussi une condition nécessaire pour que l'équation (1) puisse être réduite à la forme considérée. Mais cette condition n'est pas suffisante; car, si elle est remplie, l'équation (1) pourra se ramener à l'équation

$$(\alpha) \left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y^2 = H(X) \ ,$$

où H(x) est un polynôme du second degré en X.

En géneral, la condition pour que H soit de la forme kX^n (k = const) est

$$(n-1)p_4^2 - na_0 p_6 = 0 \ ,$$

c'est un *invariant relatif du poids* 8.

On conclut de (6) que la *condition* $p_{2n+2} = 0$ exprime que, dans la forme canonique (α), H est un polynôme de degré $(n-1)$ en X; si 'lon a $p_4 = 0$ H est une constante.

2° Cherchons la relation nécessaire et suffisante pour que l'équation (1) puisse être ramenée à la forme canonique

$$\left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y^2 = e^X \ .$$

En opérant comme dans l'exemple précédent, on obtient la condition cherchée

$$p_4^2 - a_0 p_6 = 0 ,$$

l'invariant relatif du poids 8. Mais cette condition, dans ce cas, on peut simplifier en posant

$$\mathrm{H} = e^{\mathrm{x}} , \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{H}' = e^{\mathrm{x}} .$$

Les équations

$$\mathrm{H} = -\frac{a_0}{\mathrm{M}^2\mathrm{U}^2} , \qquad \mathrm{H}' = -\frac{p_4}{\mathrm{M}^4\mathrm{U}^2}$$

après la substitution H et H′ par leurs valeurs e^{x}, et après l'élimination de e^{x}, donnent la condition cherchée

$$p_4 - a_0 \mathrm{M}^2 = 0$$

nécessaire et suffisante; c'est un *invariant relatif du poids* 4.

4. — Dans notre thèse *(loc. cit.)* nous avons donné les cas d'intégrabilité de l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + a_2 y^2 + 2a_1 y \frac{dy}{dx} + a_0 = 0 ; \qquad (1)$$

mais nous les répéterons ici pour compléter ce travail.

1° Le cas le plus simple est celui où les coefficients a_0, a_1, a_2 sont constants ou peuvent être rendus constants par un changement convenable de fonction et de variable indépendante.

2° Un autre *cas* d'intégrabilité s'obtient à l'aide de la transformation suivante. Si l'on pose dans l'équation (1) $a_0 = a_2$ et en la divisant par a_0, elle devient, après différentiation,

$$\mathcal{A}_2 y'^2 + 2\mathcal{B}_1 y'' y' + 2\mathcal{B}_2 y'' y + 2\mathcal{B}_3 y' y = 0 ;$$

en y posant

$$y = e^{\int \frac{dx}{u}} ,$$

on aura

$$\frac{du}{dx} = \frac{pu^2 + \mathrm{Q}u + \mathrm{R}}{\mathrm{S}u + \mathrm{T}} .$$

Cette équation est étudiée par M. Elliot [1]; il a transformé cette équation, en posant

$$u = a\mathrm{Z} + b$$

[1] *Annales de l'Ecole Norm. Sup.*, 1890, p. 101.

où

$$a = e^{\int \frac{p}{S} dx}, \qquad b = -\frac{T}{S},$$

à la forme canonique

$$\frac{dZ}{dx} + f(x) = \frac{\varphi(x)}{Z}; \tag{11}$$

les coefficients $f(x)$ et $\varphi(x)$ étant des fonctions de a_0 et a_1, c'est-à-dire de x, faciles à calculer (thèse: p. 11).

Dans l'équation (11) on peut séparer des variables si l'on a:

a) $f(x) = 0$,
b) $\varphi(x) = 0$,
c) $f(x) = \text{const.}$, $\varphi(x) = \text{const.}$ $(\varphi(x) = kf(x)$
d) $f(x) = \text{const.}$, $\varphi(x) = kx(\varphi(x) = kxf(x)$ } $k = \text{const.}$

A chaque cas d'intégrabilité de l'équation (11) correspond un *cas* d'intégrabilité de l'équation (1) (thèse).

3o Si l'on pose dans l'équation (1)

$$a_0 = ax + b, \qquad a_1 = c, \qquad a_2 = 0,$$

où a, b, c sont constants, elle devient, après différentiation,

$$2y'y'' + 2cy'^2 + 2cyy'' + a = 0.$$

En y posant

$$y' = p, \qquad y'' = p\frac{dp}{dy}$$

et considérant y comme fonction inconnue et p comme variable indépendante, elle devient une équation linéaire en y

$$\frac{dy}{dp} + \frac{2cp}{a + 2p^2}y + \frac{2p^2}{a + 2p^2} = 0.$$

4o Si, dans l'équation (1), on fait $a_2 = a_1^2$, elle se ramène à l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx} + a_1 y + \sqrt{-a_0}\right)\left(\frac{dy}{dx} + a_1 y - \sqrt{-a_0}\right) = 0.$$

5.— L'équation canonique

$$(\alpha) \left(\frac{dY}{dX}\right)^2 + Y^2 = H(X)$$

est *intégrable*, comme nous l'avons montré (thèse), si $H(X)$ a l'une des formes

$$H(X) = \mathcal{A} , \qquad H(X) = \mathcal{A} e^{\mathcal{B} X} ,$$

$$H(X) = \mathcal{A} \cos \frac{2}{3} X + \mathcal{B} \sin \frac{2}{3} X ,$$

$$H(X) = (\mathcal{A} X + \mathcal{B}) e^{2Xi} ,$$

où $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont constantes arbitraires et $i = \sqrt{-1}$ (l'unité imaginaire).

En utilisant la théorie des invariants, on peut ramener l'équation (1) *à la forme canonique* (α) *intégrable.*

L'équation (α), dont la forme plus générale est (1), se présente dans plusieurs problèmes d'analyse mathématique, de Géométrie supérieure et de Mécanique rationnelle.

Par exemple, dans la Géométrie supérieure, le problème de déterminer la ligne courbe dans le plan, dont l'arc est la fonction donnée de l'angle polaire; la recherche des géodésiques des surfaces spirales, et le problème d'applicabilité de ses surfaces, l'une sur l'autre, se ramènent à l'intégration de l'équation (α).

Dans la Mécanique, le problème du mouvement d'un point matériel dans un plan, sollicité par la force, laquelle n'est qu'une fonction de l'angle polaire, et, en outre, soumis à une résistance proportionnelle à la vitesse, se ramène à l'équation différentielle (α) [1]. En général, la solution de tout problème de Mécanique dans le plan, pour lequel il existe une fonction des forces, les lignes équipotentielles étant des droites d'ailleurs quelconques, se ramène, par la méthode de Jacobi, à l'intégration de l'équation différentielle (α)[2].

MM. Mich. Petrovitch [3] et Heymann [4] ont étudié les transformations de l'équation (1).

Belgrade, Septembre 1923.

---

1 Elliot, *Annales de l'Ecole Norm. Sup.*; 1893; p. 251.
2 Darboux, *Leçons sur la Théorie des Surfaces*; t. III, p. 85.
3 *Comptes rendus*; t. CXXII, nº 22; 1896.
4 *Journal fur reine und angewandte Mathematik*; t. 119; 1898; p. 253.