Chapitre II. Géométrie métrique des vecteurs du plan : produits de deux vecteurs.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1923)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

p éléments analogues du second une combinaison scalaire sur le modèle du produit polaire, tandis que nous avons réservé le symbole)(de ce produit pour le cas où tous les éléments d'une des formes au moins entraient dans un tel produit.

En dehors des méthodes de Grassmann, Hamilton, ou de leurs disciples, la théorie des formes n'a guère considéré les opérateurs linéaires : homographies ou réciprocités, symboles de transformations quadratiques, etc. Il ne nous semble pas nécessaire de les traiter dans cette introduction.

Chapitre II.

Géométrie métrique des vecteurs du plan : produits de deux vecteurs.

Ce sont les points de la droite de l'infini du plan qu'on représente par les vecteurs. Les opérations de la géométrie métrique peuvent se définir à partir des seuls vecteurs réels, mais il est plus direct d'introduire dès le début des éléments imaginaires, à savoir les vecteurs isotropes (points cycliques) du plan.

Tandis que nous représenterons par u et v deux vecteurs égaux (que nous dirons unitaires) et rectangulaires, les vecteurs isotropes seront désignés par :

$$j_1 = u + \iota v \qquad j_2 = u - \iota v \qquad (\iota = \sqrt{-1})$$

Le *produit intérieur* de deux vecteurs a, b est dès lors défini par le produit polaire suivant [1] :

$$a \times b = ab \,)(\, j_1 j_2 = \frac{[aj_1][bj_2] + [aj_2][bj_1]}{2} \tag{1}$$

Comme :

$$j_1 j_2 = u^2 + v^2$$

il peut aussi s'écrire, comme l'on sait :

$$a \times b = ab \,)(\, u^2 + v^2) = [au][bu] + [av][bv] \,. \tag{2}$$

[1] Cf. R. Mehmke. *Vorlesungen über Punkt und Vektorenrechnung*, I, 1, p. 289.

Ses propriétés sont bien connues; nous rappellerons cependant qu'en conséquence de la définition, on a :

$$j_1^{\overset{2}{\times}} = j_2^{\overset{2}{\times}} = 0$$

et qu'un tel produit étant scalaire, on pose souvent, pour simplifier les calculs :

$$u^{\overset{2}{\times}} = v^{\overset{2}{\times}} = 1 = \frac{1}{2}(j_1 \times j_2) \tag{3}$$

l'homogénéité rompue pouvant ensuite être rétablie au moyen de la même égalité (ce qui revient à calculer avec $\left.\dfrac{a \times b}{u^{\overset{2}{\times}}}\right)$.

Tandis que le produit algébrique de deux vecteurs ne s'annule qu'avec l'un de ses facteurs, il n'en est plus de même pour le produit intérieur. Il sera aussi toujours possible de résoudre une équation intérieure :

$$\pm\, x^{\overset{2}{\times}} = a \times b$$

Supposons, par exemple, $a \times b$ positif; l'équation peut s'écrire:

$$x^2 \,)(\, j_1 j_2 = ab \,)(\, j_1 j_2$$

et la division par $j_1 j_2$ est possible et donne :

$$x^2 = ab + \lambda_1 j_1^2 + \lambda_2 j_2^2$$

λ_1 et λ_2 étant deux paramètres indéterminés; ou encore:

$$x^2 = ab \qquad \text{(modules } j_1^2,\ j_2^2\text{)}$$

c'est-à-dire qu'on est ramené à une *équivalence algébrique*; nous utiliserons à plusieurs reprises ce mode de solution; si on veut poursuivre jusqu'au bout, il faut écrire :

$$x^2 \overset{2}{)(} = (ab + \lambda_1 j_1^2 + \lambda_2 j_2^2 \overset{2}{)(} = 0$$

équation scalaire de condition entre λ_1 et λ_2.

Ce produit intérieur de deux vecteurs aurait aussi pu être défini par :

$$a \times b = ab \Big)\Big(\frac{j_1^2 \cdot j_2^2}{[j_1 j_2]}$$

et pour plus de deux vecteurs on pourrait ainsi envisager diverses extensions du produit intérieur : mais aucune n'a semblé jusqu'ici s'imposer avec quelque utilité.

Arrivons à ce que Grassmann a appelé *produit complexe* de deux vecteurs, défini du reste seulement par des lois formelles. Non sans quelque hésitation, à cause des nombreuses acceptions du mot *complexe*, nous proposerons de substituer au terme usité par Grassmann celui de *produit cyclique.*

Entre deux vecteurs, nous définirons ce produit par l'expression :

$$a \smile b = \frac{1}{[j_1 j_2]^2}\Big((ab)(j_2^2)j_1^2 - (ab)(j_1^2)j_2^2\Big) \tag{4}$$

qui peut encore s'écrire :

$$a \smile b = \frac{2}{[j_1 j_2]} ab \cdot j_1 j_2 \,. \tag{5}$$

En effet, l'on a :

$$j_1 j_2 = \frac{j_1^2 \cdot j_2^2}{[j_1 j_2]}$$

et :

$$ab \cdot (j_1^2 \cdot j_2^2) = \frac{1}{2}\Big((ab)(j_2^2)j_1^2 - (ab)(j_1^2)j_2^2\Big) \,.$$

Pour développer $a \smile b$ sous la forme (5), il est commode d'employer la relation identique entre les quatre formes aj_1, aj_2, bj_1, bj_2 :

$$[aj_1]bj_2 - [aj_2]bj_1 = [bj_1]aj_2 - [bj_2]aj_1 \,. \tag{6}$$

On voit aussitôt que :

$$j_1 \smile j_2 = 0$$

et que le produit cyclique de deux vecteurs est une nouvelle forme quadratique, mais dépendant seulement de deux unités, par exemple j_1^2 et j_2^2 ; cette forme est en effet toujours apolaire (conjuguée) d'une part à $j_1 j_2$, d'autre part à la forme primitive, en vertu de:

$$ab \cdot j_1 j_2 \cdot j_1 j_2 = 0$$
$$ab \cdot j_1 j_2 \cdot ab = 0 .$$

Le produit cyclique de deux vecteurs représente donc le système des bissectrices du produit algébrique, avec un coefficient approprié. Nous dirons encore que $a \smile b$ est l'*orientante* de ab.

On a évidemment :

$$u^{\overset{2}{\smile}} = \frac{\iota}{[uv]} u^2 \cdot (u^2 + v^2) = \iota uv$$
$$v^{\overset{2}{\smile}} = - \iota uv$$

donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} u^{\overset{2}{\smile}} + v^{\overset{2}{\smile}} = 0 \\ u \smile v = v \smile u \end{array} \right. \qquad \text{ainsi que :} \qquad (7)$$

soit les règles énoncées par Grassmann.

Remarquons encore qu'*à l'exception du produit* $j_1 \smile j_2$, le produit cyclique ne s'annule qu'avec l'un de ses facteurs, et aussi qu'on peut toujours satisfaire à l'équation :

$$x^{\overset{2}{\smile}} = a \smile b \qquad \text{ou :} \qquad (8)$$
$$x^2 \cdot j_1 j_2 = ab \cdot j_1 j_2 .$$

La division par $j_1 j_2$ est en effet possible et donne :

$$x^2 = ab + \lambda j_1 j_2$$

ou :

$$x^2 = ab \qquad (\text{module } j_1 j_2)$$

ce qui montre qu'à une équation cyclique (entre produits cycliques), on peut faire correspondre une *équivalence* ou congruence suivant le module $j_1 j_2$.

Quant au facteur indéterminé λ, sa valeur résulte de :

$$x^2 \overset{2}{)(} = (ab + \lambda j_1 j_2 \overset{2}{)(} = 0 .$$

Enfin, une équation cyclique, telle que (8.), peut aussi être remplacée par le système de deux équations scalaires :

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 \,)(\, j_1^2 = ab \,)(\, j_1^2 \\ x^2 \,)(\, j_2^2 = ab \,)(\, j_2^2 \end{array}\right. \tag{9}$$

c'est-à-dire par un système d'équations écrites en coordonnées *symétriques*.

Nous allons maintenant établir diverses formules de réduction entre produits cycliques de deux vecteurs, montrant aussi leur lien avec le produit intéıieur.

Ainsi le produit polaire de deux orientantes a pour expression:

$$a \smile b \,)(\, c \smile d = \frac{4}{[j_1 j_2]^2}(ab \,.\, j_1 j_2 \,)(\, cd \,.\, j_1 j_2)$$

se développant en :

$$= \frac{2}{[j_1 j_2]^2}\begin{vmatrix} ab \,)(\, cd & j_1 j_2 \,)(\, cd \\ ab \,)(\, j_1 j_2 & j_1 j_2 \,)(\, j_1 j_2 \end{vmatrix}$$

donc :

$$a \smile b \,)(\, c \smile d = -\, ab \,)(\, cd + \frac{1}{2}(a \times b)(c \times d)\ . \tag{10}$$

En particulier, l'équation : $a \smile b \,)(\, c \smile d = 0$ exprime en général que les bissectrices des couples *ab* et *cd* se bissectent mutuellement.

Une autre expression à considérer est :

$$a \smile b \,)(\, cd = \frac{2}{[j_1 j_2]} ab \,.\, j_1 j_2 \,.\, cd = -\, ab \,)(\, c \smile d\ .$$

Une telle expression, fonction linéaire de $a \smile b$ comme de $c \smile d$, est un produit particulier entre ces orientantes; c'est ce que nous allons retrouver ci-après. Remarquons d'abord que l'expression s'écrit aussi :

$$-\frac{2}{[j_1 j_2]}(ab \,.\, cd \,)(\, j_1 j_2 = -\, \iota(ab \,.\, cd)^{\times}$$

c'est-à-dire qu'elle représente à un facteur près l'invariant intérieur du jacobien de ab et cd. Donc l'équation :

$$(ab \,.\, cd)^{\times} = 0$$

signifie que les couples ab et cd ont mêmes bissectrices.

Or le jacobien de $a \smile b$ et $c \smile d$ représente évidemment $j_1 j_2$ affecté d'un certain coefficient : si celui-ci était nul, ab et cd auraient encore mêmes bissectrices, d'où :

$$a \smile b \,.\, c \smile d = \lambda (ab \,.\, cd)^{\times} j_1 j_2 \,.$$

On détermine le coefficient λ en considérant en particulier :

$$j_1^{\smile 2} \,.\, j_2^{\smile 2} = \lambda (j_1^2 \,.\, j_2^2)^{\times} j_1 j_2 \,.$$

ce qui donne :

$$\lambda = -\frac{1}{2},$$

d'où la formule:

$$a \smile b \,.\, c \smile d = -\frac{1}{2} (ab \,.\, cd)^{\times} j_1 j_2 \qquad (11)$$

et par suite aussi, en substituant le produit intérieur au produit algébrique :

$$\begin{aligned}(a \smile b \,.\, c \smile d)^{\times} &= -(ab \,.\, cd)^{\times} \qquad (12)\\ &= -\frac{[ac]b \times d + [bd]a \times c}{2}\end{aligned}$$

donc :

$$a \smile b \,)(\, cd = - ab \,)(\, c \smile d = \iota (a \smile b \,.\, c \smile d)^{\times} \qquad (13)$$

ce qui est bien, comme nous l'avons annoncé, une fonction linéaire d'un produit entre $a \smile b$ et $c \smile d$, donc un nouveau produit entre ces formes

Remarque. — Nous avons, dans ce qui précède, employé autant que possible des symboles d'opération; on est parfois amené à leur substituer des symboles fonctionnels. Ainsi, prendre l'orientante de ab peut être représenté par :

$$a \smile b = \mathcal{O}_2 (ab$$

de sorte que l'orientante de cette nouvelle forme serait :

$$\mathcal{O}_2 (a \smile b = \mathcal{O}_2 (\mathcal{O}_2 (ab = \mathcal{O}_2^{(2} (ab \,.$$

On vérifie du reste que l'on a :

$$\mathcal{O}_2^{(2}(ab = \frac{1}{[j_1 j_2]^2}\Big((ab)(j_2^2)j_1^2 + (ab)(j_1^1)j_2^2\Big)$$

donc:

$$\mathcal{O}_2^{(3}(ab = \mathcal{O}_2(ab$$

ce que l'on peut noter .

$$\mathcal{O}_2^{(3} = \mathcal{O}_2$$

et permet évidemment le calcul des puissances suivantes de l'opération $\mathcal{O}_2$.

Chapitre III.

Extension du produit cyclique au cas de n *vecteurs.*

Nous définirons comme *produit cyclique* de n vecteurs $a, b, c..l$ l'expression :

$$f^{(\underset{\smile}{n})} = a \smile b \smile c \ldots \smile l = \frac{1}{[j_1 j_2]^n}\Big((f^{(n)})(j_2^n)j_1^n - (f^{(n)})(j_1^n)j_2^n\Big) \qquad (1)$$

où on a posé :

$$f^{(n)} = abc \ldots l \, .$$

Cette forme, ou *orientante* de la forme initiale, est, elle aussi, algébrique et de degré n, mais ne dépend que de deux unités, par exemple j_1^n et j_2^n; elle est en effet apolaire à tout produit :

$$j_1^p j_2^{n-p} \qquad (p = 1, 2 \ldots, n-1)$$

et l'est aussi à la forme initiale $f^{(n)}$. On peut encore l'écrire sous forme d'un jacobien généralisé :

$$f^{(\underset{\smile}{n})} = \theta_n f^{(n)} \cdot j_1^{n-1} j_2 \cdot j_1^{n-2} j_2^2 \cdots \cdot j_1 j_2^{n-1} \qquad (2)$$

le coefficient θ_n pouvant se déterminer par le calcul de $j_1^{\underset{\smile}{n}}$, par exemple, ce qui donne :

$$\theta_n = \frac{C_n^1 C_n^2 \ldots C_n^{n-1}}{[j_1 j_2]^{\frac{n(n-1)}{2}}} \qquad (3)$$

le numérateur étant le produit des coefficients du binôme.