IV. — Champ de Maxwell-Lorentz.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **23 (1923)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

lerons des M^*_{ij}, pour lesquels

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_2}M^*_{34} + \frac{\partial}{\partial x_3}M^*_{42} + \frac{\partial}{\partial x_4}M^*_{23} = 0 \,, \\
&\frac{\partial}{\partial x_3}M^*_{41} + \frac{\partial}{\partial x_4}M^*_{13} + \frac{\partial}{\partial x_1}M^*_{34} = 0 \,, \\
&\frac{\partial}{\partial x_4}M^*_{12} + \frac{\partial}{\partial x_1}M^*_{24} + \frac{\partial}{\partial x_2}M^*_{41} = 0 \,, \\
&\frac{\partial}{\partial x_1}M^*_{23} + \frac{\partial}{\partial x_2}M^*_{31} + \frac{\partial}{\partial x_3}M^*_{12} = 0 \,.
\end{aligned}\right. \tag{15}$$

Ces M^*_{ij} existent évidemment; ils sont de la forme

$$M^*_{ij} = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \Phi_j}{\partial x_i} \,,$$

les Φ_i étant dits *potentiels électromagnétiques.*

Les équations (15) constituent *le second groupe des équations de Maxwell-Lorentz généralisées.* Elles expriment que $M^*_{ij}\,dx_i\,dx_j$ est une différentielle *exacte* dans E_4.

IV. — Champ de Maxwell-Lorentz.

Imaginons que l'on réduise la généralité précédente en posant

$$\begin{array}{llll}
M_{12} = \mathbf{d}_z \,, & M_{14} = -c\,\mathbf{h}_x \,; & M^*_{12} = \mathbf{h}_z \,, & M^*_{14} = c\,\mathbf{d}_x \,, \\
M_{23} = \mathbf{d}_x \,, & M_{24} = -c\,\mathbf{h}_y \,; & M^*_{23} = \mathbf{h}_x \,, & M^*_{24} = c\,\mathbf{d}_y \,, \\
M_{31} = \mathbf{d}_y \,, & M_{34} = -c\,\mathbf{h}_z \,; & M^*_{31} = \mathbf{h}_y \,, & M^*_{34} = c\,\mathbf{d}_z \,.
\end{array}$$

Alors, en écrivant x, y, z ,t pour x_1, x_2, x_3, x_4, et c étant une constante, les équations (14) deviennent

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial z} = \frac{1}{c}\left(\rho \mathbf{V}_x + \frac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial t}\right) , \\
&\frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial x} = \frac{1}{c}\left(\rho \mathbf{V}_y + \frac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial t}\right) , \\
&\frac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial y} = \frac{1}{c}\left(\rho \mathbf{V}_z + \frac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial t}\right) , \\
&\frac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial z} = \rho \,.
\end{aligned}\right. \tag{16}$$

De même les équations (15) deviennent

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial t}, \\ &\frac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial z} - \frac{\partial \mathbf{d}_z}{\partial x} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial t}, \\ &\frac{\partial \mathbf{d}_y}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{d}_x}{\partial y} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial t}, \\ &\frac{\partial \mathbf{h}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{h}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{h}_z}{\partial z} = 0 . \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Bien que la notation vectorielle n'ait rien d'indispensable, elle intervient ici commodément pour rassembler les systèmes (16) et (17) sous la forme

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{rot}\,\mathbf{h} = \mathbf{s} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t}, \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{d} = \rho, \qquad \mathbf{s} = \frac{\rho}{c}\mathbf{v}, \\ &\mathrm{rot}\,\mathbf{d} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}, \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{h} = 0 . \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Telles sont les équations de Maxwell-Lorentz qui, à vrai dire, sont aussi bien celles de Faraday-Ampère.

Des deux dernières on conclut $\mathbf{h} = -\,\mathrm{rot}\,\mathbf{f}$ et

$$\mathrm{rot}\left(\mathbf{d} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\right) = 0, \qquad \mathbf{d} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t} = \nabla\varphi ,$$

si ∇ désigne l'opération $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ qui s'applique à une quantité $\varphi(x, y, z, t)$ scalaire.

Portant dans la première équation (18), on a

$$-\,\mathrm{rot}^2\,\mathbf{f} = -\nabla^2\mathbf{f} - \nabla\,\mathrm{div}\,\mathbf{f} = \mathbf{s} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t^2} + \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t} .$$

Avec la *relation supplémentaire de Maxwell*

$$\mathrm{div}\,\mathbf{f} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 , \tag{19}$$

il reste *l'équation vectorielle*

$$-\nabla^2\mathbf{f} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial t} = \mathbf{s} . \tag{20}$$

Enfin, la seconde équation (18) donne

$$\operatorname{div}\left(\nabla\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial t}\right) = \rho ,$$

d'où, d'après la relation supplémentaire, *l'équation scalaire*

$$-\nabla^2\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \rho . \tag{21}$$

On voit que l'étude des équations (18) est ramenée à celle de (19), (20), (21).

Bien entendu

$$-\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

mais, même si l'on ne connaissait pas cette signification de ∇^2, on la retrouverait aisément en suivant le fil du calcul. Il en est de même pour toutes les notations vectorielles du présent paragraphe.

V. — OPTIQUE. — RÉLATIVITÉ RESTREINTE.

Soit $\rho = 0$. Les équations de Maxwell-Lorentz se simplifient. Le vecteur $\mathbf{v}$, qui correspond à la conductibilité électrique proprement dite, disparaît. Il ne reste, dans les seconds membres de (16), que le fameux courant de déplacement suffisant pour bâtir l'optique. Alors les équations (16) et (17) sont vérifiées par

$$\mathbf{d}_y = \mathbf{h}_z = a \cos n\left(t - \frac{x}{c}\right) ,$$

tous les autres $\mathbf{d}$ et $\mathbf{h}$ étant nuls. Cette solution élémentaire pourrait servir à en construire bien d'autres, à cause du caractère linéaire des équations; toutes ces solutions présenteraient une même propriété: celle de ne changer en rien quant t augmente de T et x de cT. Nous sommes donc en présence d'un phénomène de nature périodique qui se propage avec la vitesse c. C'est l'onde électromagnétique, c'est la lumière.

Les équations (20) et (21) rentrent dans la forme unique

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 . \tag{22}$$