

# Communications scientifiques.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **22 (1921-1922)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

8. — Chargé par le Comité de la Société mathématique suisse d'introduire la question de l'*adhésion de la Suisse à l'Union internationale mathématique*, M. H. FEHR donne un aperçu des statuts de l'Union adoptés à Strasbourg le 20 septembre 1920. Cette union se rattache au Conseil international de recherches créé sous les auspices de la Conférence internationale des académies. L'admission d'un pays à l'Union est subordonnée aux conditions fixées par le Conseil international de recherches. La Société helvétique des sciences naturelles ayant adhéré au Conseil international, en août 1920, la Société mathématique suisse ne saurait se tenir à l'écart de l'Union internationale mathématique. La question sera soumise à l'assemblée annuelle (Schaffhouse, août 1921) après entente avec le Comité central de la Société helvétique.

### Société mathématique suisse.

*Schaffhouse, 27 août 1921.*

La Société mathématique suisse a tenu sa onzième réunion annuelle à Schaffhouse, le 27 août 1921, sous la présidence de M. le Prof. L. CRELIER (Berne), à l'occasion de la cent-deuxième réunion annuelle de la Société helvétique des sciences naturelles.

Dans sa *séance administrative* la Société a décidé, à l'unanimité, d'accord avec le Comité central de la Société helvétique, d'adhérer à l'*Union internationale mathématique*. Puis, après avoir donné décharge au trésorier sortant de charge, elle a constitué comme suit le comité pour les années 1922 et 1923: M. Gustave DUMAS (Lausanne), président; M. O. SPIESS (Bâle), vice-président; M. A. SPEISER (Zurich), secrétaire-trésorier.

La prochaine réunion annuelle aura lieu à *Berne*.

### COMMUNICATIONS SCIENTIFIQUES.

1. — M. S. BAYS (Fribourg). — *Sur la généralisation du problème des triples de Steiner*. — Appelons *n-uple* une combinaison  $n$  à  $n$ , et *problème des n-uples*, le problème suivant, généralisant le *problème des triples de Steiner*:

*Pour quel nombre N d'éléments, peut-on trouver un SYSTÈME DE N-UPLES, contenant UNE FOIS et UNE SEULE FOIS chaque (n — 1)-uple de ces éléments*<sup>1</sup>?

<sup>1</sup> Exemple: Le triple 123 contient les trois couples 12, 13, 23, et le système de triples (de Steiner) 123, 145, 167, 246, 257, 347, 356, contient une fois et une seule fois chaque couple des sept éléments 1, 2, ..., 7. Voir NETTO, *Combinatorik*, chap. 10, p. 202.

Je peux établir, pour ce problème général, les résultats suivants:  
 La condition *nécessaire* pour l'existence d'un système de  $n$ -uples, est l'intégrité de tous les quotients:

$$\frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-n+2)}{n!}, \frac{(N-1)(N-2)\dots(N-n+2)}{(n-1)!}, \dots, \frac{N-n+2}{2}.$$

I. *Il y a, quel que soit  $n$ , indéfiniment des  $N$  remplissant cette condition nécessaire.* Il suffit de prendre  $N = mn! + n$  ( $m$  entier positif).

II. *Pour un  $n$  donné, les  $N$  remplissant cette condition nécessaire, sont tous les nombres  $N$  tels que  $N - n$  n'est pas congru à  $-1$ , suivant un module PREMIER inférieur ou égal à  $n$ .* Ainsi le problème des triples (de Steiner) est possible pour tous les  $N$  tels que  $N - 3$  n'est pas  $\equiv -1 \pmod{2}$  ou  $3$ , ce qui donne les formes  $N = 6x + 1$  et  $6x + 3$ . Le problème des quadruples est possible pour  $N = 6x + 2$  et  $6x + 4$ . Le problème des quintuples est possible pour tous les  $N$  tels que  $N - 5$  n'est pas  $\equiv -1 \pmod{2, 3}$  ou  $5$ ; etc.

III. *D'un système de  $n$ -uples avec  $N$  éléments, j'obtiens un système de  $(n-1)$ -uples avec  $N-1$  éléments, par suite un système de  $(n-2)$ -uples avec  $N-2$  éléments, etc.* Si donc, pour un certain  $n$ , il n'existe plus de systèmes de  $n$ -uples pour aucun  $N$ , il n'en existera plus pour aucun  $n$  supérieur. Mais ceci est peu probable. Pour tout  $N = 6x + 1$  et  $6x + 3$ , il existe des systèmes de triples (de Steiner).

IV. Appelons système *cyclique* de  $n$ -uples, celui qui possède le groupe cyclique  $\{(123 \dots N)\}$ . On a le théorème: *les systèmes cycliques de  $n$ -uples vont par PAIRES de systèmes conjugués; les 2 systèmes de la même paire sont déductibles l'un de l'autre par la substitution  $\{x, N-x\}$  et n'ont aucun  $n$ -uple commun.*

Je puis donner des systèmes de quadruples ( $n = 4$ ) et de quintuples ( $n = 5$ ) pour les premières valeurs de  $N$  permises, et j'ai le moyen de reconnaître les systèmes de  $n$ -uples *différents*, c'est-à-dire ne provenant pas l'un de l'autre par une permutation des éléments. Exemple: les éléments étant  $0, 1, \dots, 9, 0'$ , les 2 systèmes cycliques conjugués déterminés par <sup>1</sup>:

01235	01269	01278	01347	01368	01579
01239	01247	01256	01348	01357	01469

sont les 2 seuls systèmes cycliques de quintuples pour 11 éléments.

<sup>1</sup> Chaque système est constitué des 66 quintuples découlant des 6 donnés par la permutation cyclique (012 ... 0').

2. — M. G. PÓLYA (Zurich). — *Sur les zéros des dérivées successives.*

— 1. On désigne  $a$  comme *valeur exceptionnelle* de la fonction entière  $g(z)$ , si la fonction  $g(z) - a$  n'a qu'un nombre fini de zéros. Supposons que  $g(z)$  ne soit pas de la forme  $P(z) e^{Q(z)} + a$ , où  $P(z)$  et  $Q(z)$  sont des polynômes et  $a$  une constante. Alors au moins une des trois fonctions  $g(z)$ ,  $g'(z)$ ,  $g''(z)$  ne possède aucune valeur exceptionnelle.

2. Soit  $F(z)$  une fonction méromorphe. Le « champ d'activité » d'un pôle de  $F(z)$  soit défini comme l'ensemble des points plus rapprochés du pôle en question que des autres pôles de  $F(z)$  ; le champ d'activité de chaque pôle est un polygone convexe. Les zéros des fonctions  $F(z)$ ,  $F'(z)$ ,  $F''(z)$ , ... forment un ensemble dénombrable ; l'ensemble dérivé de celui-ci coïncide avec la totalité des segments séparant les champs d'activité des différents pôles de  $F(z)$ .

3. Soient  $P(z)$ ,  $Q(z)$  des polynômes, de degré  $p$ ,  $q$  respectivement,  $q \geq 2$ . Posons  $F(z) = P(z) e^{Q(z)}$ . On peut déterminer l'ensemble dérivé de l'ensemble dénombrable formé par les zéros des fonctions  $F(z)$ ,  $F'(z)$ ,  $F''(z)$ , ... : il consiste en  $q$  demi-droites issues de la racine de l'équation linéaire  $Q^{(q-1)}(z) = 0$ , partageant le plan en  $q$  angles égaux et tendant vers les directions dans lesquelles  $F(z)$  décroît le plus vite.

3. — M. Chr. MOSER (Berne). — *A propos d'équations se rapportant à une association qui se renouvelle, avec application aux caisses d'assurances sociales.* — Soient  $H$  personnes qui se réunissent pour constituer une association. A la suite de diverses circonstances (décès, etc), l'association, que nous supposons tout d'abord fermée, c'est-à-dire ne se renouvelant pas, sera devenue plus petite à l'époque  $t$ . Le nombre des participants sera représenté à ce moment-là par  $H \cdot p(t)$ , où  $p(t)$  désigne la probabilité pour un adhérent du début d'appartenir encore à l'association au temps  $t$ , de telle sorte que  $p(0) = 1$  et  $p(\infty) = 0$ . La fonction  $p(t)$  est supposée connue.

Si l'association se renouvelle d'une manière continue, dans la même mesure qu'elle diminue, et par des éléments tels que, dans leur composition, ils correspondent à la génération du début au moment de la constitution de l'association, et si, de plus, le renouvellement à l'époque  $\tau$  est désigné par  $H f(\tau) d\tau$ , il faut que l'équation suivante soit satisfaite, pour toutes les valeurs de  $t$ , et indépendamment de la base  $H$ :

$$1 = p(t) + \int_0^t f(\tau) p(t - \tau) d\tau. \quad (\text{I})$$

L'association a pour but de supporter en commun un risque bien



déterminé, par exemple, garantir des rentes de veuves dans le cas d'une caisse de secours pour veuves.

La veuve d'un participant décédé touchera, durant la période 1, une rente 1, donc durant le temps  $d\tau$ , une rente  $d\tau^1$ . Si  $H\omega(t)$  désigne le nombre de veuves, provenant de l'association fermée  $Hp(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ , qui jouissent de leur rente à l'époque  $t$ ,  $\omega(t)$  indique la probabilité pour un adhérent du début de n'être plus en vie à l'époque  $t$ , mais de laisser une veuve, en jouissance de la rente à ce moment-là. Dès lors, le nombre de veuves  $H\Omega(t)$  pour l'association qui se renouvelle se déterminera à l'aide de la relation

$$\Omega(t) = \omega(t) + \int_0^t f(\tau)\omega(t - \tau) d\tau . \quad (II)$$

D'une manière analogue, la réserve mathématique  $HZ(t)$  afférente à l'association qui se renouvelle pourra être exprimée par l'équation suivante:

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t f(\tau)z(t - \tau) d\tau , \quad (III)$$

en désignant par  $Hz(t)$  la réserve mathématique pour l'association fermée.

Le passage à l'époque du plein fonctionnement de l'assurance présente un intérêt particulier. Si  $P$  désigne la prime nette constante d'un adhérent pour la période 1,  $Pd\tau$ , pour la période  $d\tau$  et si  $v$  représente la valeur du capital qui, avec ses intérêts, au bout du temps 1 atteindra la valeur 1, nous aurons

$$P = \frac{\int_0^{\infty} v^t \omega(t) dt}{\int_0^{\infty} v^t p(t) dt} , \quad (IV)$$

et si l'on considère que, pour l'époque du plein fonctionnement de l'assurance, les fonctions  $f$ ,  $\Omega$  et  $Z$  doivent se rapprocher de cons-

<sup>1</sup> Dr O. SCHENKER. — II<sup>me</sup> Bulletin de l'Association des Actuaire suisses. — Berne, 1916.

tantes, nous aurons

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \frac{1}{\int_0^{\infty} p(t) dt}, \\ \beta &= \lim_{t \rightarrow \infty} \Omega(t) = \frac{\int_0^{\infty} \omega(t) dt}{\int_0^{\infty} p(t) dt}, \\ \gamma &= \lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = \frac{\int_0^{\infty} z(t) dt}{\int_0^{\infty} p(t) dt}. \end{aligned} \right\} \quad (\text{V})$$

et nous pourrions établir les relations

$$e^{\frac{\beta - P}{\gamma}} - 1 = i, \quad (\text{VI})$$

et

$$P \int_0^{\infty} p(t) dt + \delta \int_0^{\infty} z(t) dt = \int_0^{\infty} \omega(t) dt, \quad (\text{VII})$$

où  $e$  désigne la base des logarithmes népériens,  $i = \frac{1}{v} - 1$ , l'intérêt, et  $\delta$ , l'escompte logarithmique.

Pour l'époque du plein fonctionnement de l'assurance, le rapport  $R$  entre les recettes en intérêts de la réserve, d'une part, et les recettes en primes, d'autre part, est donné par la relation

$$R = \gamma \cdot \delta \cdot \frac{1}{P} = \frac{\int_0^{\infty} z(t) dt}{\int_0^{\infty} p(t) dt} \cdot \delta \cdot \frac{\int_0^{\infty} v^t \cdot p(t) dt}{\int_0^{\infty} v^t \cdot \omega(t) dt} \quad (\text{VIII})$$

On remarquera la facilité et l'élégance avec lesquelles les grandeurs principales, valables pour l'époque du plein fonctionnement de l'assurance, peuvent être établies. La considération d'autres risques, par exemple, du risque d'invalidité, ou la combinaison de divers risques, conduirait à des équations tout à fait analogues.

4. — M. Emile MARCHAND (Zurich). — *Le problème fondamental de l'assurance.* — Le problème fondamental de l'assurance peut être énoncé comme suit :

« *Etant donné le principe de la péréquation des ressources avec les engagements, ayant établi une hypothèse quant au développement futur d'un groupement d'assurance, et étant connues les prestations futures aux adhérents, comment déterminer les primes et répartir les charges* ».

Le problème formulé d'une manière aussi générale conduit à une infinité de solutions, qui toutes doivent satisfaire l'équation suivante <sup>1</sup> :

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{r^t} \sum_{x=x_0}^{\omega} \sum_{n=0}^N \frac{1}{r^n} (A_{x,n}^{(t)} - M_{x,n}^{(t)} \cdot P_{x,n}^{(t)}) = 0$$

en désignant par :

- $r$   $1 + i$ ,  $i$  étant le taux annuel de l'intérêt,
- $x$  l'âge des assurés au moment de leur adhésion,  $x_0$  l'âge minimum,  $\omega$  l'âge maximum,
- $t$  l'époque de l'adhésion, comptée à partir de la constitution du groupement,
- $n$  la durée d'assurance, comptée à partir de l'adhésion de l'assuré au groupement,  $N$  la plus grande durée qui puisse intervenir,
- $M_{x,n}^{(t)}$  le nombre de personnes qui adhèrent au groupement à l'époque  $t$ , âgées de  $x$  années, et qui en font encore partie comme payeurs de primes, à l'époque  $t + n$ , âgées de  $x + n$  années, avec une activité de  $n$  années,
- $p_{x,n}^{(t)}$  le montant que chacun des  $M_{x,n}^{(t)}$  assurés doit verser à l'époque  $t + n$ .
- $A_{x,n}^{(t)}$  la valeur des versements aux assurés, à effectuer dans l'intervalle de temps  $t + n$  à  $t + n + 1$ , valeur rapportée à l'époque  $t + n$ , et correspondant à l'ensemble des assurés qui ont adhéré à l'époque  $t$ , à l'âge  $x$ , et pour lesquels, après  $n$  années, des droits aux prestations subsistent pour eux-mêmes ou pour leurs ayants droit.

Tous les systèmes d'assurance doivent satisfaire cette équation et, réciproquement, de cette équation doivent dériver tous les modes de répartition des charges dans tout groupement d'assurance. *Les diverses possibilités pour la répartition des charges diffèrent l'une de l'autre uniquement par la manière dont le groupement total est subdivisé en*

<sup>1</sup> Dr Julius KAAH. Die Finanzsysteme in der öffentlichen und in der privaten Versicherung. — *Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen des österreichisch-ungarischen Verbandes der Privat-Versicherungsanstalten*. Neue Folge, 5. Bd. Wien, 1910.

*sous-groupements, tels que chacun subviennne à ses propres charges, sans apport extérieur.*

En se servant d'une représentation graphique, — deux systèmes de coordonnées rectangulaires dans l'espace,  $x, n, t$ : le système des dépenses et celui des recettes — il est aisé de définir les modes les plus usuels de répartition des charges. Il suffit de considérer, entre ces deux systèmes, l'équivalence par points, par droites, par plans, dans diverses positions.

Le rapporteur termine par quelques remarques concernant les principes de la capitalisation des primes et de la répartition des charges annuelles, et indique qu'il a préconisé ce dernier principe pour l'introduction des assurances sociales en Suisse <sup>1</sup>.

5. — M. Jules CHUARD (Lausanne). — *A propos des homologues de H. Poincaré.* — La notion d'homologie est fondamentale en Analysis situs. Pour la définir, l'auteur envisage des surfaces fermées de l'espace usuel, qu'il suppose triangulées et orientées de manière à faire apparaître un polyèdre de  $\alpha_0$  sommets,  $\alpha_1$  arêtes et  $\alpha_2$  faces. Il en tire les tableaux de Poincaré:  $T_1$  de rang  $\rho_1$  et  $T_2$  de rang  $\rho_2$ .

A la matrice  $T_1$ , il associe un système d'équations linéaires et homogènes, le système A.

Il a démontré, dans sa thèse de doctorat, que:

1° Le système A possède un système fondamental de  $\mu$  solutions en nombres 0, + 1 et - 1, ( $\mu = \alpha_1 - \rho_1$ ).

Si donc  $c_1, c_2, \dots, c_\mu$  sont ces  $\mu$  solutions, toute solution entière du système A peut se mettre sous la forme

$$C = \sum_{l=1}^{\mu} t_l c_l, \quad (1)$$

les  $t_l$  étant des nombres entiers.

2° A toute solution en nombres entiers du système A, correspond un contour fermé, constitué par des arêtes du polyèdre et réciproquement.

L'expression (1) représente donc indifféremment un contour fermé ou la solution correspondante.

Soient  $\Gamma_k$  ( $k = 1, 2, \dots, \alpha_2$ ) les solutions correspondant aux frontières des faces. Elles sont définies par les colonnes de la matrice  $T_2$ .

3° Si la surface est bilatère, l'on peut former un système fondamental avec  $\rho_2$  solutions  $\Gamma_k$  et  $\mu - \rho_2 = \alpha_1 - \rho_1 - \rho_2 = \lambda$  solutions  $c_l$

<sup>1</sup> Emile MARCHAND. A propos de l'introduction des assurances sociales en Suisse. Contribution à l'étude des diverses possibilités pour la répartition des charges. *Bulletin de l'Association des Actuaires suisses*, 16<sup>me</sup> Bull., 1921.

de sorte que toute solution entière peut se mettre sous la forme

$$C = \sum_{l=1}^{\lambda} t_l c_l + \sum_{k=1}^{\rho_2} \tau_k \Gamma_k, \quad (2)$$

les  $t_l$  et les  $\tau_k$  étant des entiers.

4° Si la surface est unilatère, le même système de solutions est complet. Il existe alors des solutions entières de la forme (2) dans lesquelles les  $\tau_k$  sont des fractions multiples de  $\frac{1}{2}$ . Cela résulte de la présence, dans la matrice  $T_2$ , d'un coefficient de torsion (invariant ou diviseur élémentaire) égal à 2.

Mais une homologie nulle caractérise un contour fermé, qui sur une surface, limite une aire. Nous avons donc, avec Poincaré, les homologies fondamentales

$$\Gamma_k \sim 0. \quad (k = 1, 2, \dots, \alpha_2)$$

Puisqu'une aire se compose nécessairement de faces, toute homologie s'exprimera à l'aide des homologies fondamentales.

Une homologie apparaît donc comme une solution entière du système A qui résulte uniquement des colonnes de la matrice  $T_2$ .

Si  $C \sim 0$ , c'est que dans (1) tous les  $t_l$  sont nuls. D'où

$$C = \sum_{k=1}^{\rho_2} \tau_k \Gamma_k. \quad (3)$$

Si, d'autre part

$$C = \sum_{l=1}^{\lambda} t_l c_l + \sum_{k=1}^{\rho_2} \tau_k \Gamma_k,$$

$$C' = \sum_{l=1}^{\lambda} t'_l c_l + \sum_{k=1}^{\rho_2} \tau'_k \Gamma_k,$$

sont tels que toutes les différences  $t_l - t'_l$  soient nulles, l'on a les homologies

$$C - C' \sim 0 \quad \text{soit} \quad C \sim C'.$$

Plus généralement, soient  $\sigma$  contours  $C_\gamma$

$$C_\gamma = \sum_{l=1}^{\lambda} t_{l,\gamma} c_l + \sum_{k=1}^{\rho_2} \tau_{k,\gamma} \Gamma_k \quad (\gamma = 1, 2, \dots, \sigma)$$

l'on peut écrire l'homologie

$$\sum_{\gamma=1}^{\sigma} m_{\gamma} C_{\gamma} \sim 0,$$

si les  $\lambda$  égalités suivantes sont satisfaites

$$\sum_{\gamma=1}^{\sigma} t_{l,\gamma} m_{\gamma} = 0,$$

d'où une conséquence importante: Entre  $\lambda + 1$  contours fermés tracés sur une surface fermée, il existe toujours une homologie nulle.  $\lambda + 1$  exprime l'ordre de connexion de la dite surface.

Les homologies possèdent toutes les propriétés des solutions entières d'un système d'équations linéaires et homogènes. On peut additionner ou soustraire deux homologies, multiplier ou diviser (quand c'est possible) tous les termes d'une homologie, l'on retrouve une homologie.

Relativement à la division, il faut remarquer qu'elle peut conduire à un contour  $C$  défini par (3), tel que les  $\tau_k$  soient des fractions. Dans ce cas l'homologie  $C \sim 0$  est dite « par division ». Dans tous les autres cas elle est dite « sans division ».

L'homologie « par division » est une expression symbolique qui ne peut exister que dans le cas de surfaces unilatères. Elle met en évidence des contours fermés qui, parcourus une fois, ne limitent pas d'aire, mais qui en deviennent frontières, si on les parcourt deux ou un nombre pair de fois dans le même sens.

6 et 7. — M. Rolin WAVRE (Neuchâtel). — I. *Réponse à la question posée par M. Plancherel sur le problème de la médiane à une courbe fermée plane.* — Voir *l'Ens. math.*, t. XXI, p. 265-277, *Sur l'équation fonctionnelle*  $f[\varphi_1(t)] = f[\varphi_2(t)]$ .

II. *Remarque sur quelques équations de Fredholm dans le domaine complexe.* — M. Pincherle a montré le parti que l'on pouvait tirer de l'équation de Fredholm pour l'étude de certaines équations fonctionnelles dans le domaine complexe notamment l'équation de Schröder à une variable pour le problème local. Je voudrais en partant d'un point de vue un peu différent traiter l'équation de Schröder à plusieurs variables étudiées par M. Leau dans sa thèse (*Annales de Toulouse*, 1897).

Soient  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ ,  $n$  courbes fermées simples analytiques situées dans les plans des variables complexes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  limitant un domaine  $D$  à  $2n$  dimensions et  $n$  fonctions  $\psi_p(x_1, \dots, x_n)$ , ( $p = 1, 2, \dots, n$ ) holomorphes dans le domaine  $D$  et sur sa frontière, telles que

$x_1, x_2, \dots, x_n$  étant quelconque sur  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n$  respectivement,  $\psi_p$  soit intérieur à  $\Gamma_p$ .

Ceci étant, on peut démontrer en transformant légèrement une méthode employée par M. Julia, dans son mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles, qu'à tout point intérieur au domaine D correspond également un point intérieur à D et que les itérés successifs  $\psi_p(x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_p[\psi_1(x_1, \dots, x_n), \psi_2, \dots, \psi_n]$  d'un point quelconque de D convergent vers le point double unique P de la substitution  $x_p, \psi_p$ . Il est dès lors immédiat que sous ces conditions l'équation de Fredholm

$$A \varphi(x_1, \dots, x_n) = \frac{\lambda}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_n} \dots \int_{\Gamma_1} \frac{\varphi(z_1, \dots, z_n) dz_1 \dots dz_n}{[z_1 - \psi_1(x_1, \dots, x_n)] X \dots X [z_n - \psi_n(x_1, \dots, x_n)]}$$

est entièrement équivalente à l'équation de Schröder

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \lambda \varphi[\psi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_n(x_1, \dots, x_n)].$$

*Système d'équations fonctionnelles.* Je vais donner une condition suffisante pour que le système

$$U_p(x) = \lambda \sum_{q=1}^{\infty} A_{pq}(x) U_q[\psi_q(x)] \quad (p = 1, 2, 3, \dots) \quad (1)$$

où les fonctions  $U_p(x)$  sont inconnues puisse se ramener à une unique équation de Fredholm. Les  $A_{pq}(x)$  et  $\psi_q(x)$  étant holomorphes à l'intérieur d'un cercle C et sur ce cercle lui-même, il suffit que  $x$  étant quelconque sur C,  $\psi_q(x)$  soit intérieur à C et cela pour tous les  $q = 1, 2, 3, \dots$ ; et que l'on ait, les  $\alpha_q$  formant une suite de nombres positifs tels que  $\sum_{q=1}^{\infty} \alpha_q$  converge:

$$\left| \frac{A_{pq}(x)}{z - \psi_q(x)} \right| < \alpha_q$$

quels que soient  $q = 1, 2, 3, \dots$  et les variables  $x$  et  $z$  sur C. Les systèmes de la forme (1) à un nombre fini de fonctions inconnues

$$U_p(x) = \lambda \sum_{q=1}^n A_{pq}(x) U_q[\psi_q(x)]$$

ont été étudiés par M. Leau dans sa thèse et dans le cas où toutes les



fonctions  $\psi_q(x)$  sont identiques par M. Böttcher (*Annales de l'Ecole Normale*, 1909).

8 et 9. — M. G. JUVET (Neuchâtel). — I. *Sur la méthode de la variation des constantes en mécanique céleste*. — Soit un système canonique:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} ; \quad \frac{dp_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2 \dots n) \quad (1)$$

où  $H = H_1 + R$ . Supposons que ni  $H_1$ , ni  $R$  ne dépendent explicitement du temps  $t$ . Si l'on sait résoudre le système canonique où  $H = H_1$ , on sait qu'il est aisé de résoudre, grâce à la méthode de la variation des constantes arbitraires, le problème posé et cela, en le ramenant à un système canonique où  $H = R$ . La démonstration que nous donnons ici, et que nous croyons nouvelle, utilise systématiquement la notion de transformations canoniques (T.C.).

Soit une T.C.:

$$q_i = f_i(\alpha_k, \beta_k) , \quad p_i = g_i(\alpha_k, \beta_k) , \quad (2)$$

transformant  $H_1$  en  $\varphi(\alpha_1 \dots \alpha_n)$ ; alors, on sait que:

$$\alpha_i = \text{const.} \quad \beta_i = - \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_i} t + \gamma_i . \quad (3) \quad (\text{où } \gamma_i = \text{const})$$

On peut prendre  $\alpha_i$  et  $\gamma_i$  comme nouvelles variables canoniques au lieu de  $\alpha_i$  et  $\beta_i$ , et chercher à mettre à leur place dans (2), des fonctions de  $t$ , tellement choisies que (2) donne l'intégrale générale de (1), où  $H = H_1 + R$ . On a, en effet,

$$\Sigma \beta_i \delta \alpha_i = \Sigma \gamma_i \delta \alpha_i - \delta(t\varphi) ,$$

ce qui montre bien qu'on peut conjuguer à  $\alpha_i$ , la grandeur  $\gamma_i$ . D'autre part:

$$\Sigma p_i \delta q_i = \Sigma \beta_i \delta \alpha_i + \delta S ,$$

d'où:

$$\Sigma \gamma_i \delta \alpha_i = \Sigma p_i \delta q_i + \delta(t\varphi - S) . \quad (4)$$

Or la fonction génératrice  $H'$  du système canonique, qui définit les fonctions  $\alpha_i$  et  $\gamma_i$ , est:

$$H' = - L' + \Sigma \gamma_k \frac{d\alpha_k}{dt} \quad (5)$$

où  $L'$  est définie par:

$$\frac{d(\Sigma \gamma_k \delta \alpha_k)}{dt} = \delta L' .$$

Mais on sait que

$$\frac{d(\Sigma p_i \delta q_i)}{dt} = \delta L \quad \left( L = -H + \Sigma p_i \frac{dq_i}{dt} \right);$$

(3) montre donc que:

$$L' = L + \frac{d}{dt}(t\varphi - S) \quad (6)$$

Exprimons  $H'$  au moyen des  $\alpha$  et des  $\gamma$ . On a d'après (3):

$$\Sigma \gamma_i \frac{d\alpha_i}{dt} = \Sigma \beta_i \frac{d\alpha_i}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \cdot t$$

or

$$\Sigma \beta_i \frac{d\alpha_i}{dt} = \Sigma p_k \frac{dq_k}{dt} - \frac{dS}{dt}$$

car d'après les hypothèses faites  $S$  ne dépend pas explicitement de  $t$  et  $dS = \delta S$ . On a donc:

$$\Sigma \gamma_i \frac{d\alpha_i}{dt} = \overline{\Sigma p_k \frac{dq_k}{dt} - \frac{dS}{dt}} + t \frac{d\varphi}{dt}$$

où la barre indique qu'il faut effectuer le changement de variables indiqué. (5) devient alors, en utilisant (6):

$$\begin{aligned} H' &= \overline{-L - t \frac{d\varphi}{dt} - \varphi + \frac{dS}{dt} + \Sigma p_k \frac{dq_k}{dt} - \frac{dS}{dt} + t \frac{d\varphi}{dt}} \\ &= \overline{-L + \Sigma p_k \frac{dq_k}{dt} - \varphi} = \overline{H - \varphi} \end{aligned}$$

Or  $\overline{H} = \varphi + \overline{R}$ ; donc:  $H' = \overline{R}$ . Le système canonique cherché est bien, comme les résultats classiques nous le confirment:

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial \overline{R}}{\partial \gamma_i}; \quad \frac{d\gamma_i}{dt} = - \frac{\partial \overline{R}}{\partial \alpha_i}.$$

II. *Les équations aux dérivées fonctionnelles et la théorie de la relativité.* — M. VOLTERRA<sup>1</sup> a montré que les équations lagrangiennes qui

<sup>1</sup> *Rendiconti dei Lincei*, 1890, VI, p. 127.

définissent les fonctions  $y_1 \dots y_k$ , rendant extrémale l'intégrale multiple :

$$I = \int \dots \int F \left( x_1 \dots x_k ; y_1 \dots y_k ; \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial y_i}{\partial x_j}, \dots, \frac{\partial y_k}{\partial x_k} \right) d_{x_1} \dots d_{x_k}$$

peuvent prendre une forme canonique. On définit de nouvelles variables pour remplacer les  $\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = y_{ij}$ , par une transformation analogue à celle de Poisson-Hamilton:  $p^{ij} = \frac{\partial F}{\partial y_{ij}}$ , alors si l'on introduit la fonction

$$H = -F + \sum_{ij} p^{ij} y_{ij},$$

le système canonique définissant les  $y$  et les  $p$  est :

$$\sum_j \frac{\partial p^{ij}}{\partial x_j} = - \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial H}{\partial p^{ij}}. \quad (C)$$

Lorsque  $F$  dépend des  $y_{ij}$  par l'intermédiaire exclusif des déterminants fonctionnels  $\frac{D(y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_k})}{D(x_1, x_2, \dots, x_k)}$ , M. Volterra a montré que le

système canonique (C') (de forme légèrement différente de celle de C) peut être résolu si l'on connaît une solution de certaine équation aux dérivées fonctionnelles partielles dépendant d'un nombre suffisant de constantes arbitraires. Il généralise ainsi les méthodes de Jacobi.

Dans le cas qui nous occupe et qui se présente en relativité (détermination des  $g_{ik}$  par un principe de moindre action, ou équations du champ électromagnétique, etc.)<sup>1</sup>, je n'ai pu obtenir que l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles à laquelle satisfait la fonctionnelle  $I$ .  $I$  est en effet une fonctionnelle qui dépend de la frontière  $R_{k-1}$ , limitant la région de l'espace à  $k$  dimensions sur laquelle on intègre, et qui dépend encore des valeurs des  $y_i$  sur cette frontière. En suivant pas à pas les idées de Jacobi<sup>2</sup>, on arrive à démontrer que  $I$  satisfait à l'équation :

$$I'_n + H \left( x_1 \dots x_k ; y_1 \dots y_n, \frac{\partial I}{\partial (y_1, x_1)}, \dots, \frac{\partial I}{\partial (y_i, x_j)}, \dots, \frac{\partial I}{\partial (y_n, x_k)} \right) = 0 \quad (1)$$

<sup>1</sup> Voir WEYL : *Raum, Zeit, Materie* (Die Miesche Theorie et le chapitre IV), Berlin, 4<sup>e</sup> éd., 1921. — Une édition française de cet ouvrage vient de paraître.

<sup>2</sup> *Vorlesungen über Dynamik*, 19<sup>e</sup> leçon.

On a remplacé dans  $H(x_j, y_i, p^{ij})$ , les  $p^{ij}$  par les  $\frac{\partial I}{\partial (y_i, x_j)}$  qui sont les dérivées fonctionnelles partielles de  $I$ , par rapport à  $y_i$ , dans la direction de l'axe  $x_j$ .  $I'_n$  est la dérivée normale de  $I$ . Ces grandeurs sont définies par les identités suivantes. Calculons  $\delta I$ , en variant les  $y_i$  sur le contour de quantités  $\delta y_i$  sans altérer le contour  $R_{k-1}$ , alors :

$$\delta I = \int_{R_{k-1}} \left[ \sum_i \left\{ \sum_j \frac{\partial I}{\partial (y_i, x_j)} \cos(x_j, n) \right\} \delta y_i \right] d^{(k-1)} \tau$$

où  $(x_j, n)$  est l'angle que fait la normale à  $R_{k-1}$  avec l'axe des  $x_j$ , et où  $d^{(k-1)} \tau$  est l'élément d'hypervolume de  $R_{k-1}$ .

Si maintenant on fait varier le contour, sans toucher aux  $y_i$ , cette variation étant définie par un glissement  $\delta n$  de chacun des points de la frontière  $R_{k-1}$ , le long de la normale qui y est relative, la dérivée  $I'_n$  est définie par la formule qui donne la variation  $\delta' I$  de la fonctionnelle  $I$ , dans ce cas :

$$\delta' I = \int_{R_{k-1}} I'_n \delta n d^{(k-1)} \tau .$$

Nous avons cherché à tirer de la considération de l'équation (1) des conséquences utiles pour l'intégration du système (C); le problème est plus difficile que celui que s'est posé M. Volterra. Nous avons obtenu jusqu'ici quelques résultats intéressants grâce à l'emploi de deux méthodes dont on trouvera l'une dans les C. R. de la Société suisse de physique, mais nous ne sommes pas encore parvenu à généraliser tous les résultats de Jacobi<sup>1</sup>.

10. -- M. C. CARATHÉODORY (Smyrne). — *Sur des transformations générales de Legendre.*

### Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

**Allemagne.** — M. M. DEHN, professeur à l'Ecole technique supérieure de Breslau, a été nommé professeur ordinaire à l'Université de Francfort a. M.

M. P. GUTHNICK a été nommé professeur ordinaire d'astronomie à l'Université de Berlin et directeur de l'Observatoire universitaire à Neubabelsberg.

<sup>1</sup> Depuis le mois de septembre, nous avons pu faire notamment avancer cette question (janvier 1922: date de la correction des épreuves).