DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE STECKEL PAR L'ÉLIMINATION DU TEMPS ENTRE LES ÉQUATIONS DE LAGRANGE

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE STÆCKEL PAR L'ÉLIMINATION DU TEMPS ENTRE LES ÉQUATIONS DE LAGRANGE

PAR

M. Emile TURRIÈRE (Montpellier).

Le théorème de LIOUVILLE a été généralisé par M. P. STÆCKEL et par M. E. GOURSAT[1] sous la forme suivante:

Soient $A_1, B_1, C_1 \dots Q_1$ des fonctions d'un seul paramètre q_1; $A_2, B_2, C_2 \dots Q_2$ des fonctions d'un seul paramètre q_2; $A_3, B_3, C_3 \dots Q_3$ des fonctions d'un seul paramètre q_3; etc.

Soient

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & . \\ B_1 & B_2 & B_3 & . \\ C_1 & C_2 & C_3 & . \\ . & . & . & \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} Q_1 & Q_2 & Q_3 & . \\ B_1 & B_2 & B_3 & . \\ C_1 & C_2 & C_3 & . \\ . & . & . & \end{vmatrix};$$

M_1, M_2, etc., étant les mineurs relatifs aux éléments des premières lignes de ces déterminants, soient enfin

$$T = \Delta\left(\frac{q_1'^2}{M_1} + \frac{q_2'^2}{M_2} + \frac{q_3'^2}{M_3} + \dots\right), \quad \left(q'_\alpha = \frac{dq_\alpha}{dt}\right), \quad U = \frac{D}{\Delta}.$$

L'intégration des équations de la dynamique avec les expressions précédentes de l'énergie cinétique T et de la fonction des forces U, pour un système à k paramètres $q_1, q_2, q_3 \dots$, est réduc-

[1] P. STAECKEL. Sur une classe de problèmes de dynamique, *C. R.*, t. CXVI, 6 mars 1893, p. 485-487.

E. GOURSAT. Sur une classe de problèmes de dynamique, *C. R.*, t. CXVI, 8 mai 1893, p. 1050-1051.

P. STAECKEL. Sur des problèmes de dynamique qui se réduisent à des quadratures, *C. R.*, t. CXVI, 5 juin 1893, p. 1284-1286.

tible à K^2 quadratures; $K(K-1)$ de ces quadratures déterminent les relations entre les paramètres; K quadratures entrent dans l'expression du temps.

Le théorème a été démontré comme application de la méthode de JACOBI. Je vais en donner une démonstration nouvelle, fondée sur l'emploi des équations obtenues après l'élimination du temps entre les équations de LAGRANGE. Cette démonstration généralise celle du théorème de LIOUVILLE, exposée dans un précédent travail [1].

Je vais établir la démonstration avec trois paramètres q_1, q_2 et q_3, mais sous une forme telle que la démonstration soit identique dans le cas général de K paramètres.

Le dernier paramètre, q_3, étant pris pour paramètre indépendant avec

$$\frac{dq_1}{dq_3} = \eta_1 , \quad \frac{dq_2}{dq_3} = \eta_2 ,$$

et en écrivant simplement q pour q_3, je poserai :

$$T = \Theta\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 \qquad \Omega^2 = \Theta . U = DH \qquad \text{avec} \qquad H = \frac{\eta_1^2}{M_1} + \frac{\eta_2^2}{M_2} + \frac{1}{M_3} .$$

Je supposerai nulle tout d'abord la constante h de l'intégrale des forces vives, $T - U = h$. Les $K - 1 = 2$ équations de Lagrange, *après élimination du temps*, sont les suivantes :

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\eta_1}\right) = \frac{\partial\Omega}{\partial q_1} , \quad \frac{d}{dq}\left(\frac{\partial\Omega}{\partial\eta_2}\right) = \frac{\partial\Omega}{\partial q_2} .$$

En remarquant que

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\eta_1} = \frac{D}{\Omega}\frac{\eta_1}{M_1} , \quad \frac{\partial\Omega}{\partial\eta_2} = \frac{D}{\Omega}\frac{\eta_2}{M_2} ,$$

elles deviennent :

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{D}{\Omega}\frac{\eta_1}{M_1}\right) = \frac{\partial\Omega}{\partial q_1} , \quad \frac{d}{dq}\left(\frac{D}{\Omega}\frac{\eta_2}{M_2}\right) = \frac{\partial\Omega}{\partial q_2} .$$

[1] Démonstration du théorème de LIOUVILLE par l'élimination de temps entre les équations de LAGRANGE. *L'Enseignement mathématique,* t. XXII, 1921-1922, p. 277-285.

La première s'écrit encore :

$$\frac{2D}{\Omega}\frac{\eta_1}{M_1}\frac{d}{dq}\left(\frac{D}{\Omega}\frac{\eta_1}{M_1}\right)=\frac{d}{dq}\left(\frac{D^2}{\Omega^2}\frac{\eta_1^2}{M_1^2}\right)=\frac{2D}{\Omega}\frac{\eta_1}{M_1}\frac{\partial\Omega}{\partial q_1}=\frac{D}{\Omega^2}\frac{\eta_1}{M_1}\cdot\frac{\partial(\Omega^2)}{dq_1},$$

c'est-à-dire:

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{D}{H}\frac{\eta_1^2}{M_1^2}\right)=\frac{\eta_1}{HM_1}\cdot\frac{\partial(DH)}{\partial q_1}.$$

On obtient ainsi le système suivant de trois équations équivalant au système des deux premières d'entre elles:

$$\left\{\begin{aligned}\frac{d}{dq}\left(\frac{D}{H}\cdot\frac{\eta_1^2}{M_1^2}\right)&=\frac{\eta_1}{HM_1}\frac{\partial(DH)}{\partial q_1},\\ \frac{d}{dq}\left(\frac{D}{H}\cdot\frac{\eta_2^2}{M_2^2}\right)&=\frac{\eta_2}{HM_2}\frac{\partial(DH)}{\partial q_2},\\ \frac{d}{dq}\left(\frac{D}{H}\cdot\frac{1}{M_3^2}\right)&=\frac{1}{HM_3}\frac{\partial(DH)}{\partial q_3}.\end{aligned}\right.$$

Je poserai maintenant :

$$\frac{D}{H}\frac{\eta_1^2}{M_1^2}-Q_1=\lambda_1,\qquad \frac{D}{H}\frac{\eta_2^2}{M_2^2}-Q_2=\lambda_2,\qquad \frac{D}{H}\frac{1}{M_3^2}-Q_3=\lambda_3.$$

Les dérivées de Q_1, Q_2, Q_3 par rapport aux variables respectives q_1, q_2, q_3 seront désignées par Q_1', Q_2', Q_3' et, par suite:

$$\eta_1 Q_1'=\frac{dQ_1}{dq},\qquad \eta_2 Q_2'=\frac{dQ_2}{dq}.$$

Avec ces notations, les équations deviennent :

$$\begin{aligned}\frac{d\lambda_1}{dq}+\eta_1 Q_1'&=\frac{\eta_1}{HM_1}\left(D\frac{\partial H}{\partial q_1}+H\frac{\partial D}{\partial q_1}\right),\\ \frac{d\lambda_2}{dq}+\eta_2 Q_2'&=\frac{\eta_2}{HM_2}\left(D\frac{\partial H}{\partial q_2}+H\frac{\partial D}{\partial q_2}\right),\\ \frac{d\lambda_3}{dq}+\quad Q_3'&=\frac{1}{HM_3}\left(D\frac{\partial H}{\partial q_3}+H\frac{\partial D}{\partial q_3}\right).\end{aligned}$$

Prenons la première. Comme Q_2, Q_3 et M_1 ne sont pas fonctions de q_1, cette équation devient :

$$M_1 \frac{d\lambda_1}{dq} + M_1 \eta_1 Q_1'$$
$$= \frac{\eta_1}{H} \left\{ - D \left(\frac{\eta_2^2}{M_2^2} \frac{\partial M_2}{\partial q_1} + \frac{1}{M_3^2} \frac{\partial M_3}{\partial q_1} \right) + H \left(M_1 Q_1' + Q_2 \frac{\partial M_2}{\partial q_1} + Q_3 \frac{\partial M_3}{\partial q_1} \right) \right\} ;$$

elle se réduit à la suivante :

$$M_1 \frac{d\lambda_1}{dq} + \eta_1 \left[\lambda_2 \frac{\partial M_2}{\partial q_1} + \lambda_3 \frac{\partial M_3}{\partial q_1} \right] = 0 .$$

Finalement, nous obtenons le système suivant de trois équations :

$$\frac{M_1}{\eta_1} \frac{d\lambda_1}{dq} + \lambda_2 \frac{\partial M_2}{\partial q_1} + \lambda_3 \frac{\partial M_3}{\partial q_1} = 0 ,$$
$$\lambda_1 \frac{\partial M_1}{\partial q_2} + \frac{M_2}{\eta_2} \frac{d\lambda_2}{dq} + \lambda_3 \frac{\partial M_3}{\partial q_2} = 0 ,$$
$$\lambda_1 \frac{\partial M_1}{\partial q_3} + \lambda_2 \frac{\partial M_2}{\partial q_3} + M_3 \frac{d\lambda_3}{dq} = 0 ;$$

avec l'identité

$$\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3 = 0 ,$$

(qui résulte de la définition même des λ).

La forme de cette identité conduit à poser :

$$\lambda_1 = \beta B_1 + \gamma C_1 , \quad \lambda_2 = \beta B_2 + \gamma C_2 , \quad \lambda_3 = \beta B_3 + \gamma C_3 ;$$

puisque :

$$B_1 M_1 + B_2 M_2 + B_3 M_3 \equiv 0 , \qquad C_1 M_1 + C_2 M_2 + C_3 M_3 \equiv 0 ;$$

β et γ sont, pour le moment, des fonctions arbitraires. Les équations linéaires et homogènes en $\frac{M_1}{\eta_1}$, $\frac{\partial M_2}{\partial q_1}$, $\frac{\partial M_3}{\partial q_1}$,

$$\frac{M_1}{\eta_1} \frac{d\lambda_1}{dq} + \lambda_2 \frac{\partial M_2}{\partial q_1} + \lambda_3 \frac{\partial M_3}{\partial q_1} = 0 ,$$
$$\frac{M_1}{\eta_1} \frac{dB_1}{dq} + B_2 \frac{\partial M_2}{\partial q_1} + B_3 \frac{\partial M_3}{\partial q_1} = 0 ,$$
$$\frac{M_1}{\eta_1} \frac{dC_1}{dq} + C_2 \frac{\partial M_2}{\partial q_1} + C_3 \frac{\partial M_3}{\partial q_1} = 0 ,$$

entraînent l'équation :

$$\begin{vmatrix} \frac{d\lambda_1}{dq} & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \frac{dB_1}{dq} & B_2 & B_3 \\ \frac{dC_1}{dq} & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

ou encore :

$$B_1 \frac{d\beta}{dq} + C_1 \frac{d\gamma}{dq} = 0 \quad .$$

Pour la même raison :

$$B_2 \frac{d\beta}{dq} + C_2 \frac{d\gamma}{dq} = 0 \quad , \qquad B_3 \frac{d\beta}{dq} + C_3 \frac{d\gamma}{dq} = 0 \quad .$$

Ces conditions exigent que β et γ soient des constantes. En remontant alors à la définition des λ, les équations deviennent :

$$\frac{D}{H} \frac{\eta_1^2}{M_1^2} = Q_1 + \beta B_1 + \gamma C_1 \ ,$$

$$\frac{D}{H} \frac{\eta_2^2}{M_2^2} = Q_2 + \beta B_2 + \gamma C_2 \ ,$$

$$\frac{D}{H} \frac{1}{M_3^2} = Q_3 + \beta B_3 + \gamma C_3 \ ,$$

avec deux constantes arbitraires β et γ, ou encore:

$$\frac{\eta_1^2}{M_1^2(Q_1 + \beta B_1 + \gamma C_1)} = \frac{\eta_2^2}{M_2^2(Q_2 + \beta B_2 + \gamma C_2)} = \frac{1}{M_3^2(Q_3 + \beta B_3 + \gamma C_3)} \ .$$

$$\pm \frac{dq_1}{M_1 \sqrt{Q_1 + \beta B_1 + \gamma C_1}} = \pm \frac{dq_2}{M_2 \sqrt{Q_2 + \beta B_2 + \gamma C_2}}$$

$$= \pm \frac{dq_3}{M_3 \sqrt{Q_3 + \beta B_3 + \gamma C_3}} \ .$$

Ces dernières relations conduisent aux équations (en prenant les signes $+$):

$$\frac{B_1\,dq_1}{\sqrt{Q_1+\beta B_1+\gamma C_1}}+\frac{B_2\,dq_2}{\sqrt{Q_2+\beta B_2+\gamma C_2}}+\frac{B_3\,dq_3}{\sqrt{Q_3+\beta B_3+\gamma C_3}}=0\,,$$

$$\frac{C_1\,dq_1}{\sqrt{Q_1+\beta B_1+\gamma C_1}}+\frac{C_2\,dq_2}{\sqrt{Q_2+\beta B_2+\gamma C_2}}+\frac{C_3\,dq_3}{\sqrt{Q_3+\beta B_3+\gamma C_3}}=0\,,$$

intégrables par six quadratures.

Pour simplifier l'écriture, j'ai pris $h=0$. Dans le cas général, il suffit de changer U en $U+h$, c'est-à-dire D en $D+h\Delta$, ou encore Q_1 en Q_1+hA_1, Q_2 en Q_2+hA_2 et Q_3 en Q_3+hA_3. Le problème est ainsi résolu par les formules avec six quadratures suivantes; ces deux équations entre les seules coordonnées définissent les trajectoires :

$$\int\frac{B_1\,dq_1}{\sqrt{Q_1+hA_1+\beta B_1+\gamma C_1}}+\int\frac{B_2\,dq_2}{\sqrt{Q_2+hA_2+\beta B_2+\gamma C_2}}$$
$$+\int\frac{B_3\,dq_3}{\sqrt{Q_3+hA_3+\beta B_3+\gamma C_3}}=\text{constante}\,,$$

$$\int\frac{C_1\,dq_1}{\sqrt{Q_1+hA_1+\beta B_1+\gamma C_1}}+\int\frac{C_2\,dq_2}{\sqrt{Q_2+hA_2+\beta B_2+\gamma C_2}}$$
$$+\int\frac{C_3\,dq_3}{\sqrt{Q_3+hA_3+\beta B_3+\gamma C_3}}=\text{constante}\,;$$

(h, β, γ sont trois constantes arbitraires).

La loi du temps est ensuite déterminée par le théorème des forces vives. L'intégrale des forces vives est ici :

$$T=\Delta H\,.\left(\frac{dq_3}{dt}\right)^2=U+h\,,$$

d'où

$$\left(\frac{dt}{dq_3}\right)^2=\frac{\Delta H}{U+h}=\frac{\Delta^2}{D+h\Delta}\cdot\frac{D+h\Delta}{M_3^2(Q_3+hA_3+\beta B_3+\gamma C_3)}\,,$$

car on a :

$$\frac{D+h\Delta}{H}=M_3^2(Q_3+hA_3+\beta B_3+\gamma C_3)\,;$$

l'expression de dt est donc :

$$dt=(A_1M_1+A_2M_2+A_3M_3)\frac{dq_3}{M_3\sqrt{Q_3+hA_3+\beta B_3+\gamma C_3}}\,;$$

Ce qui, en vertu des expressions de $\frac{dq_1}{dq_3}$, $\frac{dq_2}{dq_3}$, devient (à une constante additive près):

$$t = \int \frac{A_1\,dq_1}{\sqrt{Q_1 + hA_1 + \beta B_1 + \gamma C_1}} + \int \frac{A_2\,dq_2}{\sqrt{Q_2 + hA_2 + \beta B_2 + \gamma C_2}}$$

$$+ \int \frac{A_3\,dq_3}{\sqrt{Q_3 + hA_3 + \beta B_3 + \gamma C_3}} .$$

D'une manière générale, on aurait K — 1 équations entre les seuls paramètres, chacune contenant K quadratures; le temps est ensuite donné par K quadratures. En tout, K^2 quadratures *indépendantes.*

Les résultats obtenus sont identiques à ceux fournis par l'application de la méthode de Jacobi.

Le théorème de Liouville est un cas particulier du théorème de Stæckel. Il suffit de prendre des valeurs constantes pour les B, pour les C et, par suite, pour les M. Dans le cas particulier du théorème de Liouville, la démonstration s'arrête avant l'introduction des λ ; M_1, M_2, M_3 étant réduits à l'unité, H étant indépendant de $q_1\, q_2$ ... on a simplement

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{D}{H}\,\frac{\eta_1^2}{M_1^2}\right) = \eta_1 Q_1' = \frac{dQ_1}{dq} .$$

C'est le résultat de ma précédente note. Les fonctions λ ici introduites sont constantes, dans le cas de théorème de Liouville.

20 mars 1922.