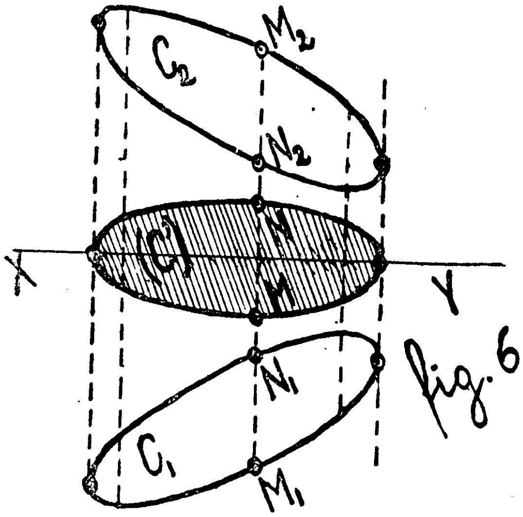
§ 3.

§ 3.

Considérations relatives au cas de $(n=2)$ et au cas de $(n=3)$. Considérons deux courbes convexes, planes, orthogonalement *symétriques* l'une de l'autre par rapport à un axe (XY); traçons toutes les cordes $(M_1 N_1 N_2 M_2)$ perpendiculaires à l'axe (XY); et marquons (fig. 6) les points milieux M et N des segments $(M_1 N_2)$ et $(N_1 M_2)$. On construit ainsi une courbe (C′) convexe, qu'on peut appeler: *courbe moyenne de* C_1 *et* C_2 *relative à la direction* (XY).



Cette courbe (C′) n'est pas identique à la courbe moyenne générale (C), définie précédemment; son pourtour est plus petit que celui de (C), et elle est entièrement située à l'intérieur de (C); nous démontrerons ce détail dans la remarque I.

D'autre part, d'après ce que nous avons établi, la courbe (C) a le même pourtour que chacune des courbes symétriques C_1 et C_2; en effet, le pourtour de (C) est égal à la moyenne arithmétique des pourtours de C_1 et C_2, et ces deux derniers ont la même longueur.

Si donc on appelle p la valeur du pourtour de chacune des courbes données, $\mathfrak{P}$ le pourtour de la courbe moyenne (C′) relative à la direction (XY), et P le pourtour de la courbe moyenne générale (C), on a les relations :

$$\mathfrak{P} \leqq \mathrm{P} \; ; \qquad \mathrm{P} = p \; ; \qquad \mathfrak{P} \leqq p \; .$$

On a donc établi que le périmètre de la courbe (C′) est plus petit que celui des courbes proposées, ou lui est au plus égal.

Or, remarquons que la courbe (C′) n'est pas autre chose que la « transformée de Steiner de la courbe C_1 relativement à une direction perpendiculaire sur (XY) [1] » ; on l'obtient en portant sur toutes les cordes (M_1N_1) prolongées, de part et d'autre de l'axe (XY), la moitié de la longueur (M_1N_1). On démontre ainsi que la « transformée de Steiner relative à la direction (M_1N_1) » a en général un pourtour plus petit que celui de la courbe primitive C_1.

Pour que le pourtour de (C′) soit égal à celui de C_1, on voit immédiatement la condition : il faudrait que la courbe C_1 ait un axe de symétrie parallèle à (XY).

Remarquons d'ailleurs que l'aire de la courbe est conservée, quelle que soit la courbe convexe C_1.

Remarque I. Nous avons dit que le pourtour de la courbe (C′) est plus petit que celui de la courbe (C), et par conséquent plus petit que celui de chacune des courbes symétriques données. Etablissons ce théorème, géométriquement et par le calcul.

Prenons la droite (XY) comme axe des x, et une des tangentes communes comme axe des y (fig. 6′).

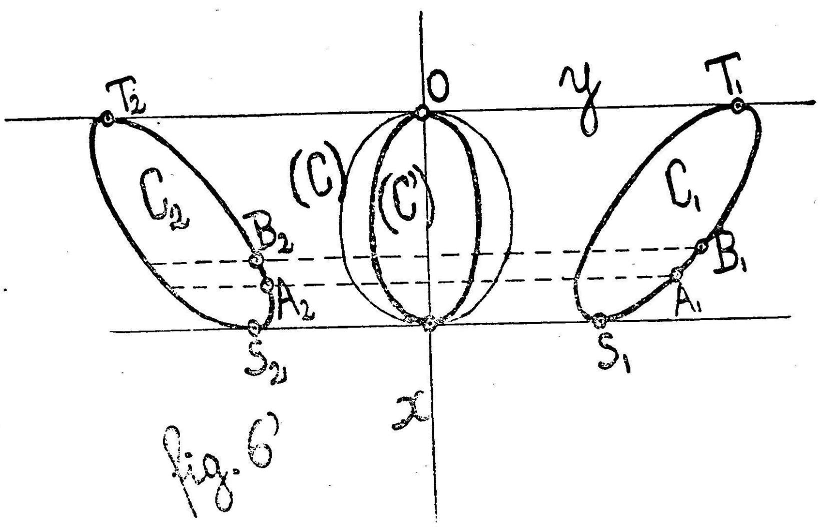


fig. 6′

Géométriquement : Cela résulte de la construction même des courbes (C) et (C′). Prenons en effet deux petits arcs cor-

[1] Steiner. *Œuvres,* II, p. 264-267.

respondants $\widehat{A_1B_1}$ et $\widehat{A_2B_2}$ (fig. 6′). Si on les assimile à des segments de droites (fig. 6″), et qu'on cherche les variétés

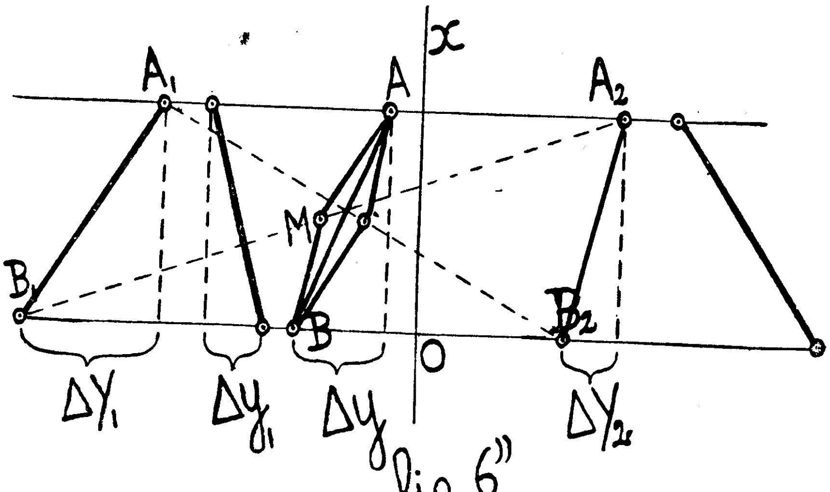


fig. 6″

(C) et (C′) déduites de ces segments, on a :

$$\overline{AB} < \overline{AM} + \overline{MB} \ .$$

On étend immédiatement à la courbe entière.

Par le calcul : Soient

$$y = y_1(x) \qquad \text{et} \qquad y = Y_1(x)$$

les équations des deux branches $\widehat{S_1T_1}$ de la courbe C_1, la fonction $Y_1(x)$ se rapportant à l'arc extérieur. Les équations de la courbe C_2 seront :

$$\begin{cases} y = Y_2(x) = -\, y_1(x) \ , \\ y = y_2(x) = -\, Y_1(x) \ , \end{cases}$$

$Y_2(x)$ se rapportant à l'arc intérieur $\widehat{S_2T_2}$.

On a alors, en désignant toujours par p le pourtour de C_1 et de C_2, et par P celui de la courbe moyenne générale (C) :

$$\begin{cases} P = p = \int\sqrt{1 + Y_1'^2}\,dx + \int\sqrt{1 + y_1'^2}\,dx \\ \qquad\quad = \int\sqrt{1 + Y_1'^2}\,dx + \int\sqrt{1 + Y_2'^2}\,dx \ . \end{cases}$$

Quant à la courbe moyenne (C′) relative à la direction (Ox), courbe dont le pourtour est désigné par $\mathfrak{P}$, il vient :

$$\Delta y = \frac{\Delta Y_1 + \Delta Y_2}{2} \; ; \qquad \text{(fig. 6'')}$$

$$y' = \frac{Y_1' + Y_2'}{2} \; ;$$

$$\mathfrak{P} = 2 \int \sqrt{1 + \left(\frac{Y_1' + Y_2'}{2}\right)^2}\, dx \; .$$

On vérifie immédiatement qu'on a :

$$\mathfrak{P} \leqq P \; .$$

Pour qu'il y ait égalité ($\mathfrak{P} = P$), on voit qu'il faudrait :

$$Y_1'(x) = Y_2'(x) \; ,$$

c'est-à-dire :

$$Y_1(x) = Y_2(x) + K \; ,$$

K étant une constante. Autrement dit : les courbes C_1 et C_2 devraient présenter un axe de symétrie parallèle à (Ox). C'est également ce qu'indique le raisonnement géométrique basé sur les fig. 6′ et 6″.

Remarque II. Plus généralement, toutes les fois que deux courbes convexes C_1 et C_2 sont comprises entre deux tangentes parallèles (fig. 7), on peut considérer la courbe

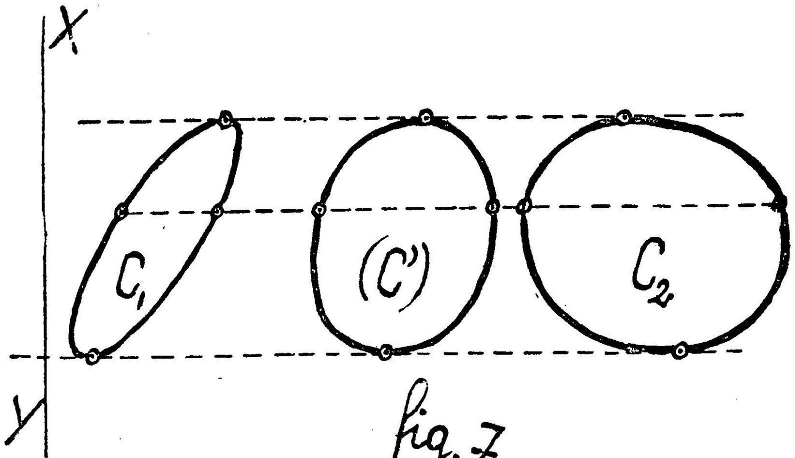


fig. 7

moyenne (C′) relative à la direction (XY) perpendiculaire à celle des tangentes.

Dans ce cas, la courbe (C′) n'a pas d'axe de symétrie orthogonale.

Application de cette remarque : Considérons le cas où les courbes C_1 et C_2 se réduisent à deux segments de droites concourants (fig. 8). Joignons les extrémités A_1 et A_2, et cherchons la variété moyenne (C′) de C_1 et C_2 relative à la direction (XY) perpendiculaire à la droite $(A_1 A_2)$. Les variétés proposées ne sont symétriques l'une de l'autre par rapport à aucun axe (symétrie orthogonale). La variété moyenne (C′) obtenue n'est alors autre chose que la médiane (OA′) du triangle $(OA_1 A_2)$.

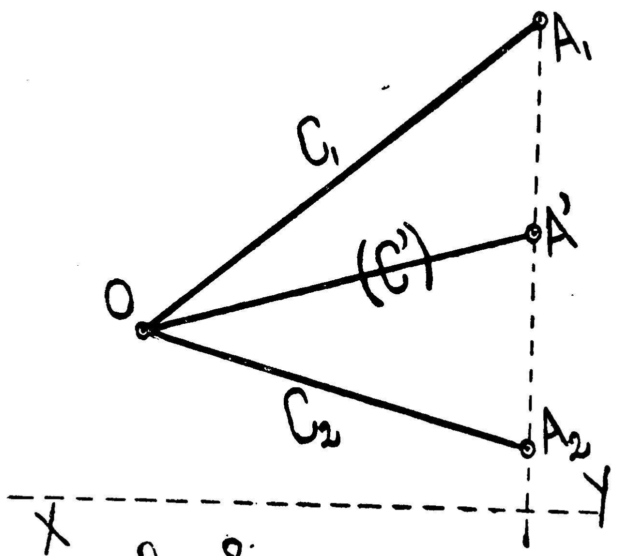


fig. 8

Considérons maintenant, dans l'espace E_3, deux corps convexes quelconques C_1 et C_2, symétriques l'un de l'autre par rapport au plan π (la fig. 6 peut encore servir; il suffit de poser que le plan π est représenté par sa trace XY sur le plan du dessin). En opérant comme dans le cas de $(n = 2)$, on construit un volume convexe (C′), qu'on peut appeler : « Corps moyen de C_1 et C_2 relativement au plan π ».

Ce corps (C′) est tout entier contenu dans le corps moyen général (C) précédemment défini ; cela résulte des définitions mêmes de (C) et (C′). D'ailleurs, on vérifie aisément que la surface de (C′) est plus petite que celle de C_1 ; soient en effet (fig. 6′) :

$$z = Z_1(x, y) , \qquad z = z_1(x, y) ,$$

les équations des deux portions $\widehat{S_1T_1}$ de la surface de C_1, la fonction $Z_1(x, y)$ donnant la portion extérieure. Soient encore :

$$\begin{cases} z = Z_2(x, y) = - z_1(x, y) , \\ z = z_2(x, y) = - Z_1(x, y) , \end{cases}$$

les équations des deux portions $\widehat{S_2T_2}$ de la surface de C_2, la fonction $Z_2(x, y)$ se rapportant à la portion intérieure.

Désignons par s la surface de C_1 ou de C_2; et $\mathcal{S}$ celle de la variété (C'). Posons ensuite :

$$\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial Z_1}{\partial x} = P_1 , \\[2ex] \dfrac{\partial Z_1}{\partial y} = Q_1 ;\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial z_1}{\partial x} = p , \\[2ex] \dfrac{\partial z_1}{\partial y} = q ;\end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{\partial Z_2}{\partial x} = P_2 , \\[2ex] \dfrac{\partial Z_2}{\partial y} = Q_2 ;\end{array}\right.$$

il vient :

$$\left\{\begin{array}{l} s = \displaystyle\int\!\!\int\left[\sqrt{1 + P_1^2 + Q_1^2} + \sqrt{1 + p^2 + q^2}\right] dx\,dy \\[2ex] \quad = \displaystyle\int\!\!\int\left[\sqrt{1 + P_1^2 + Q_1^2} + \sqrt{1 + P_2^2 + Q_2^2}\right] dx\,dy .\end{array}\right.$$

Puis, pour la variété (C') :

$$z'_x = \frac{P_1 + P_2}{2} ; \qquad z'_y = \frac{Q_1 + Q_2}{2} ;$$

$$\mathcal{S} = 2\int\!\!\int\sqrt{1 + \left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{Q_1 + Q_2}{2}\right)^2}\, dx\,dy .$$

Or, ce corps (C') n'est pas autre chose que le « transformé de Steiner de la variété C_1 relativement à une direction perpendiculaire au plan π » (voir *Œuvres* de STEINER, II, p. 302); on l'obtient en portant sur toutes les cordes (M_1N_1) prolongées, et de part et d'autre du plan π, la moitié de la longueur du segment (M_1N_1). Il en résulte que le « transformé de Steiner de la variété C_1 relativement à une direction (M_1N_1) d'ailleurs quelconque » a en général une surface plus petite que celle des variétés symétriques proposées.

Pour que la surface soit la même, il faudrait :

$$P_1 = P_2 \quad \text{et} \quad Q_1 = Q_2 ;$$

c'est-à-dire :

$$Z_1(x , y) = Z_2(x , y) + K ,$$

avec $K =$ constante; il faudrait donc que le corps C_1 présente un plan de symétrie parallèle au plan π; l'opération de Steiner reviendrait alors à déplacer le corps C_1 en translation, perpendiculairement à son plan de symétrie.

Remarque I. On verrait facilement que la variété (C′) a le même volume que C_1 ou C_2.

Remarque II. Pour pouvoir appliquer l'opération (C′), il n'est point nécessaire que les corps C_1 et C_2 soient symétriques l'un de l'autre par rapport à un certain plan π ; il suffit qu'ils soient convexes et inscrits dans un même cylindre. Mais alors, le corps moyen (C′), relatif au plan π normal aux génératrices du cylindre, ne présente plus de plan de symétrie orthogonale.

Remarque III. On pourra de même, dans l'espace E_n à n dimensions, construire une variété (C′) correspondant aux deux variétés C_1 et C_2, lorsque ces dernières seront orthogonalement symétriques l'une de l'autre par rapport à un certain (n — plan) π.

§ 4.

Combinaison sommatoire géométrique de deux variétés C_1 et C_2 dans l'espace E_n.

Considérons la variété moyenne (C) générale de C_1 et C_2. Et construisons une variété semblable (V) avec un rapport de proportionnalité égal à 2. Cette variété (V) présente toutes les arêtes de C_1 et toutes celles de C_2, en grandeur et orientation ; de même, on y trouve toutes les faces de C_1 et celles de C_2 en vraie grandeur (il y a, en plus, d'autres faces « de liaison »).

On obtiendrait le même résultat si l'on cherchait à construire directement la plus petite variété convexe possible présentant toutes les arêtes de C_1 et toutes celles de C_2 en grandeur et en orientation, et seulement ces arêtes (elles peuvent d'ailleurs figurer plusieurs fois).

Nous pouvons appeler cette variété (V) la « somme géométrique de C_1 et C_2 ; ou plutôt, afin d'éviter toute confusion avec la terminologie employée dans la théorie des vecteurs, nous dirons : « Combinaison sommatoire géométrique » des variétés C_1 et C_2.

Exemple : Si on a deux sphères de rayons R_1 et R_2, la variété (V), qui leur correspond, est une sphère de rayon $(R_1 + R_2)$.