IV

crit dans la même conique en soumettant les $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$ seuls à une permutation circulaire ; dans ce cas nous trouvons :

$$[\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1][\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}_1][\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}'_3][\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}'_3] = [\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}'_3][\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}'_3][\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}_1][\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3]\,.$$

La division des deux dernières équations conduit pour six points d'une conique sphérique à la relation

$$\frac{[\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3][\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}_3][\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_3]}{[\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1][\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}_1][\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}'_3]} = \frac{[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}'_3][\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_3][\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}'_3]}{[\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}'_3][\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}'_3][\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}_1]}$$

qui n'est autre chose que *le théorème* bien connu *de Carnot.*

Nous interrompons ici les applications de l'identité pour y revenir au paragraphe 30.

IV

24. — Les identités entre *six* vecteurs des paragraphes précédents ne sont pas les seules possibles. Il y en a d'autres ; ainsi on démontre sans peine que

$$\begin{gathered}[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'][\lambda_1\mathfrak{b}+\mu_1\mathfrak{c}\quad \lambda_2\mathfrak{c}+\mu_2\mathfrak{a}\quad \lambda_3\mathfrak{a}+\mu_3\mathfrak{b}]\\ \pm[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,][\lambda'_1\mathfrak{b}'+\mu'_1\mathfrak{c}'\quad \lambda'_2\mathfrak{c}'+\mu'_2\mathfrak{a}'\quad \lambda'_3\mathfrak{a}'+\mu'_3\mathfrak{b}']\end{gathered}$$

est identiquement nul, pourvu que l'expression scalaire

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3+\mu_1\mu_2\mu_3$$

ne change pas en valeur absolue, lorsque les $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sont remplacés par les $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ et inversement.

25. — On satisfait déjà à la condition imposée aux λ_i et μ_i en prenant

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \mathfrak{c}.\mathfrak{a}' &\quad \lambda_2 &= \mathfrak{a}.\mathfrak{b}' &\quad \lambda_3 &= \mathfrak{b}.\mathfrak{c}'\\ \mu_1 &= -\,\mathfrak{b}.\mathfrak{a}' & \mu_2 &= -\,\mathfrak{c}.\mathfrak{b}' & \mu_3 &= -\,\mathfrak{a}.\mathfrak{c}'\end{aligned}$$

et c'est ainsi qu'on arrive à l'identité

$$[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'][\mathrm{V}\mathfrak{a}',\,\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ \ \mathrm{V}\mathfrak{b}',\,\mathfrak{c}\mathfrak{a}\ \ \mathrm{V}\mathfrak{c}',\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}]+[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}][\mathrm{V}\mathfrak{a},\,\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\ \ \mathrm{V}\mathfrak{b},\,\mathfrak{c}'\mathfrak{a}'\ \ \mathrm{V}\mathfrak{c},\,\mathfrak{a}'\mathfrak{b}']\equiv 0 \quad \text{(X)}$$

Applications. — 1. Supposons que les sommets et les côtés de deux triangles sphériques ayent les vecteurs

$$\begin{aligned}\mathrm{A}_i &\equiv \mathfrak{a}\,;\ \mathfrak{b}\,;\ \mathfrak{c} &\qquad \mathrm{A}'_i &\equiv \mathrm{V}\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\,;\ \mathrm{V}\mathfrak{c}'\mathfrak{a}'\,;\ \mathrm{V}\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\\ a_i &\equiv \mathrm{V}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\,;\ \mathrm{V}\mathfrak{c}\mathfrak{a}\,;\ \mathrm{V}\mathfrak{a}\mathfrak{b} & a'_i &\equiv \mathfrak{a}'\,;\ \mathfrak{b}'\,;\ \mathfrak{c}'\,.\end{aligned}$$

Dans ce cas, les droites qui relient les sommets correspondants (A_i, A_i') et les points d'intersection des côtés correspondants (a_i, a_i') seront

$$(A_1, A_1') \equiv V\mathfrak{a}, \mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \qquad (a_1, a_1') \equiv V\mathfrak{a}', \mathfrak{b}\mathfrak{c}$$

etc., et l'identité (IX) nous apprend :

Lorsque les droites (A_i, A_i') *sont concourantes, les points d'intersection* (a_i, a_i') *sont collinéaires et inversement.* C'est là *le théorème* bien connu *de Desargues.*

2. Lorsque par contre les sommets et les côtés de deux triangles sphériques A_i et A_i' sont

$$A_i \equiv \mathfrak{a} : \mathfrak{b} ; \mathfrak{c} \qquad A_i' \equiv \mathfrak{a}' ; \mathfrak{b}' ; \mathfrak{c}'$$

$$a_i \equiv V\mathfrak{b}\mathfrak{c} ; V\mathfrak{c}\mathfrak{a} ; V\mathfrak{a}\mathfrak{b} \qquad a_i' \equiv V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' ; V\mathfrak{c}'\mathfrak{a}' ; V\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$$

la même identité nous fournit un *théorème de Steiner*[1] :

Lorsque les normales abaissées des A_i *sur les* a_i' *sont concourantes, il en est de même des normales abaissées des* A_i' *sur les* a_i[2].

On le voit sans peine en remarquant que $V\mathfrak{a}, \mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, etc., sont dans ce cas les normales abaissées des sommets A_i du premier triangle sur les côtés a_i' du second. Leur produit pseudo-scalaire est nul lorsque ces trois normales sont concourantes.

3. En troisième lieu considérons ensemble les identités :

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}][V\mathfrak{a}, \mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \quad V\mathfrak{b}, \mathfrak{c}'\mathfrak{a}' \quad V\mathfrak{c}, \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'] + [\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'][V\mathfrak{a}', \mathfrak{b}\mathfrak{c} \quad V\mathfrak{b}', \mathfrak{c}\mathfrak{a} \quad V\mathfrak{c}', \mathfrak{a}\mathfrak{b}] \equiv 0$$

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}][V\mathfrak{a}, \mathfrak{c}'\mathfrak{b}' \quad V\mathfrak{b}, \mathfrak{b}'\mathfrak{a}' \quad V\mathfrak{c}, \mathfrak{a}'\mathfrak{c}'] + [\mathfrak{a}'\mathfrak{c}'\mathfrak{b}'][V\mathfrak{a}', \mathfrak{c}\mathfrak{b} \quad V\mathfrak{b}', \mathfrak{b}\mathfrak{a} \quad V\mathfrak{c}', \mathfrak{a}\mathfrak{c}] \equiv 0 .$$

La seconde s'obtient de la première, lorsqu'on y change $\mathfrak{b}'$ et $\mathfrak{c}'$ en $\mathfrak{c}'$ et $\mathfrak{b}'$. Or, la disparition des premiers termes dans les deux identités entraîne celle des seconds termes, ce qui, en supposant que les $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sont les sommets d'un premier et $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ ceux d'un second triangle sphérique signifie :

---

[1] *Gesammelte Werke*, Bd. I, S. 155-162.

[2] Voir par. 23, 2.

Lorsque sont concourantes les normales abaissées de A_1, A_2, A_3 sur les côtés a'_1, a'_2, a'_3 et sur les côtés a'_1, a'_3, a'_2, il en est de même des normales abaissées de A'_1, A'_2, A'_3 sur les côtés a_1, a_2, a_3 et a_1, a_3, a_2, en d'autres mots :

Lorsque les deux triangles sphériques A_i *et* A'_i *sont di-orthologiques en* A_1, *ils le sont encore en* A'_1.

V

26. — Nous pouvons encore dans l'expression fondamentale

$$[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'][\lambda_1\mathfrak{b} + \mu_1\mathfrak{c} \ldots] \pm [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}][\lambda'_1\mathfrak{b}' + \mu'_1\mathfrak{c}' \ldots]$$

remplacer les vecteurs arbitraires $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}$, ... par les vecteurs également arbitraires $V\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, $V\mathfrak{c}\mathfrak{a}$, ... et ensuite, pour satisfaire à la condition imposée aux λ_i, μ_i ..., prendre

$$\lambda_1 = \mathfrak{a}' . \mathfrak{b} \qquad \lambda_2 = \mathfrak{b}' \, \mathfrak{c} \qquad \lambda_3 = \mathfrak{c}' . \mathfrak{a}$$
$$\mu_1 = \mathfrak{a}' . \mathfrak{c} \qquad \mu_2 = \mathfrak{b}' . \mathfrak{a} \qquad \mu_3 = \mathfrak{c}' . \mathfrak{b} \, .$$

Dans ce cas nous avons évidemment

$$\lambda_1 V\mathfrak{c}\mathfrak{a} + \mu_1 V\mathfrak{a}\mathfrak{b} = V\mathfrak{a} . \mathfrak{a}', \mathfrak{b}\mathfrak{c}$$

etc., de sorte que nous arrivons à l'identité

$$\begin{aligned}&[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}']^2[V\mathfrak{a} . \mathfrak{a}', \mathfrak{b}\mathfrak{c} \quad V\mathfrak{b} . \mathfrak{b}', \mathfrak{c}\mathfrak{a} \quad V\mathfrak{c} . \mathfrak{c}', \mathfrak{a}\mathfrak{b}]\\ &- [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]^2[V\mathfrak{a}' . \mathfrak{a} , \mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \quad V\mathfrak{b}' . \mathfrak{b} , \mathfrak{c}'\mathfrak{a}' \quad V\mathfrak{c}' . \mathfrak{c} . \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'] \equiv 0 \, . \qquad \text{(XI)}\end{aligned}$$

27. — Nous allons faire de cette identité *deux applications*. — 1. D'abord elle nous servira à démontrer *un théorème de M. R. Bricard*[1] :

Soient A_i et A'_i deux triangles sphériques.

Lorsque les points d'intersection Q_i *des droites* $(A_i, A'_i) \equiv p_i$ *avec les côtés* a_i *du premier triangle sont collinéaires, les droites de jonction* q_i *des points* $(a_i, a'_i) \equiv P_i$ *avec les sommets* A'_i *du second triangle sont concourantes et inversement.*

---

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1906, p. 96.