VI. La spacgrandon.

Du shildon PE k. $P'E'$ estas reciprokan pere de indico c, *kiam lu plenumas la kondito:*

$$h \ tang \frac{\omega}{2} = c,$$

en kiu h signas la longo PP', kay ω la edrangulo EE'. La cheesto de arbitera konstanto c en la fundamenta reciprokrelato montras, ke la shildara geometrio, en spaco S, estas qadratika; seqe, ke 3 shildon estas necesan por difini la lineara monoserio (lineara shildaro) reprezentata da la ci-sura relato; seqas anke, ke 2 linearan shildaron e su sekcas slo *dushildo* (shildoparo).

Kiam indico c estas nula, shildon PE k. $P'E'$ plenumas la kondito

$h \ tang \frac{\omega}{2} = 0$ (t. e.: $h = 0$, or $\omega = 0$), kay la koresponda lineara monoserio farivas *speciala*. Oni tiam diras, ke la du shildon estas „reciprokan pere de indico nul“, or pli simple, ke lu estas „reciprokan“, sen mencii ni indico; kay tio signifas, ke la shildo povas migri de la pozicio PE al la pozicio $P'E'$ per nura rotaco, sen glito, or per nura glito, sen rotaco; alivorte, tio signifas, ke la shildon PE k. $P'E'$ havas komuna origino P (kay malsaman folion E k. E'), or, ke lu havas komuna folio E (kay malsaman originon P k. P').

Remarko. — La shildara geometrio en undimensia spaco S estas identa al la geometrio de rigidan korpon (korpara geometrio) cirker fixa axo S, kar, en ti spaco, shildo estas figuro eqalvalora al pozicio de irg nia rigida korpo, ligita al axo S.

Oni savas, ke, en la tridimensia spaco, al du irg nin pozicion, K k. K', de rigida korpo korespondas un, kay nur un, axo S tia, ke la korpo povas migri de pozicio K al pozicio K' per nuran rotaco k. glito ye la axo S, seqe per movo tute entenata en la undimensia spaco S.

Oni povas do vortigi la cia teoremo: same ke, inter du irg nin punkton oni povas streki un, kay nur un, rekto, same: *inter du irg nin pozicion, K k. K', de rigida korpo en tridimensia spaco oni povas streki un, kay nur un, undimensia spaco S.*

VI. La spacgrandon.

1. — En la undimensia spaco S la fundamentan grandon estas: 1e la *longo* (punktlongo), or nombro de punkton lokantan inter du punkton P k. P' de la rekto S; 2e la *angulo* (edrangulo), or nombro de edron lokantan inter du edron E k. E' de la sama rekto S.

2a. — En la dudimensia spaco plana la fundamentan grandon undimensian estas: 1me la *longo* (punktlongo), or nombro de punkton lokantan inter du punkton P k. P' de irg ni rekto; 2me la *angulo* (reglangulo), or nombro de reglon kushantan inter du irg nin reglon R k. R'.

Ulter tin undimensian grandon existas, en plano, un dudimensia grando, nomita *areo*, kiu estas la nombro de punkton lokantan intre de klozita kurvo C, or la nombro de reglon sekcantan ti kurvo, kar irg ni plana kurvo estas konceptibla, cor kom punktaro, cor kom reglaro (aro de la ye kurvo C tanjantan reglon).

2b. — En la dudimensia spaco angula, or cirkerpunkta, la fundamentan grandon undimensian estas: 1me la *reglangulo*, or nombro de reglon kushantan inter du reglon R k. R' de irg ni reglofasko; 2me la *edrangulo*, or nombro de edron lokantan inter du irg nin edron E k. E'.

Ulter tin undimensian grandon existas un grando dudimensia, nome la *konusa solidangulo,* or simple *konusangulo,* kiu estas la limo, al kiu kuras la pluredrangulo, kiam la nombro de ties edron kreskas senfine. La konusangulo estas la nombro de reglon R kushantan intre de ni klozita konuso, or la nombro de edron E sekcantan ti konuso, kar konuso estas konceptibla, cor kom reglaro, cor kom edraro (formita da la tanjantan edron).

Konusangulon estas mezuratan per la areo, e kiu lu eltranchas el sfera surfaco kuncentre strekita per radiuslongo 1, kar la punkton lokantan sur ti areo estas evidente samnombran, ol la reglon kushantan intre de la konuso.

3. — En la tridimensia spaco la fundamentan grandon undimensian estas: 1^me^ la *longo* (punktlongo), or nombro de punkton lokantan inter du punkton P k. P' de irg ni rekto; 2^me^ la *angulo* (edrangulo), or nombro de edron situantan inter du irg nin edron E k. E'; 3^me^ la *tordiva angulo* (reglangulo), or nombro de reglon kushantan inter du irg nin reglon R k. R', or pli precize, inter du reglon R k. R' de irg ni orta konoido, kies axo estas la rekto I montrita sur figuro 6^ma^.

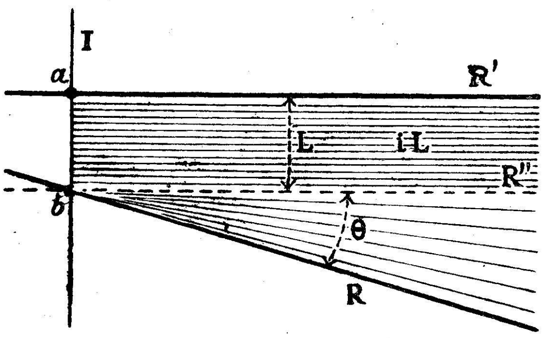

Fig. 6. — La tordiva reglangulo.

La tordiva angulo RR' estas *komplexa grando* (reglara), kar la dureglangulo RR' estas formata da la radiantan reglon kushantan en la planangulo RR'' $(=\vartheta)$ kay da la paralelan reglon kushantan inter la reglon R'' k. R'. Se nu nomas L la pley kurta distanco ab de la reglon R k. R', la valoro de la tordiva angulo RR' estos:

$$\lambda = \vartheta + i\,L,$$

en ki valoro la litero i signas la imaginara uno $(\sqrt{-1})$ uzata en algebro.

Kie en la kutima reprezento de komplexan qantiton, la pure komplexa parto $(i\,L)$ staras orte ye la reala parto ϑ, kar la plano $R''R'$ staras orte ye la plano RR''; kay la valoro de la komplexa qantito $(\vartheta + i\,L)$ estas sendipenda de la voyo seqita por migrigi la reglo de la pozicio R al la pozicio R', kar ti qantito restas la sama, irg nia estu la formo de la orta konoido kuniganta la reglon R k. R', kondite nur, ke la konoidaxo estu la komunortanto I.

Kar la du membron de la eqaluro $\lambda = \vartheta + i\,L$ devas esti *homogenan* (or samspecan), kay kar la grandon λ k. ϑ omdu estas grandon reglaran, la grando $i\,L$ ulsor devas esti reglara (efekte, ji konsistas el la paralelan reglon, kushantan inter R'' k. R'); alilatre la grando L estas punktara grando (pley kurta disto ab inter R k. R'); oni do konstatas, ke faktoro i transformas punktara grando en samvalora reglara grando, or, se oni preferas, faktoro i transformas punkto en reglo.[1]

La nombro $n = i\,L : \vartheta$ estos nomata *picho* de la tordiva angulo RR'.

---

[1] Por pluan detalon koncerne reglaran grandon en spaco vidu artiklo aperinta en „Revue Scientifique" (23^ma^ Septembra 1905), Parizo. — Ulsor, pri la korespondo inter reglara spaco k. punktara sfersurfaco imaginara, vidu artiklo titulita *Calcul géométrique réglé* en „The American Journal of Mathematics" (1895), Baltimore, Md., U. S. A. En ti korespondo la imaginara uno i ne plu estas difinata per la eqaluro $i^2 = -1$, sed per la eqaluron $i \gtrless o$ kay $i^2 = o$, kie e tio montris Prof. C. Cailler, el la Geneva Universitato.

La dudimensian grandon en tridimensia spaco estas unme la *areo*, t. e. la nombro de punkton lokantan sur ni kurva surfaco intre de ni klozita kurvo C, strekita sur la surfaco, or la nombro de edron, kiun tuchas la surfaco en punkto intre de kurvo C. Areo estas do grando punktedrara.

La dua fundamenta grando dudimensia de la tridimensia spaco estas la *tordiva solidangulo* (reglara grando), or nombro de reglon entenatan en difinita parto de reglara biserio (kongruenco).

Nu konsideru, exemple, la kongruenco formata da omnin reglon, kiun e si apogas sur du irg nin kurvon, C k. C' (fig. 7). Oni savas, ke tin kurvon estas la *fokusan kurvon* de la kongruenco.[1] Por limigi difinita parto de la kongruenco, sufitas limigi difinita parto de la fokusan kurvon. Nu unme supozu, ke la fokusan kurvon estas du rekton A k. A' (fig. 8), kay nu marku sur tin rekton du segmenton mn $(= dL)$ kay $m'n'$ $(= dL')$; la figuro $m\,n\,m'\,n'$ estas qaredro tia, ke omnin reglon R, e si apogantan sur la segmenton dL k. dL', kushas intre de la qaredro. La reglon R formas tordiva solidangulo, kies fokusan segmenton estas mn k. $m'n'$. La valoro de ti solidangulo estas:

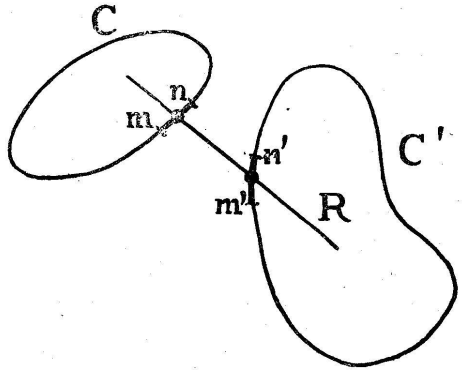

Fig. 7.

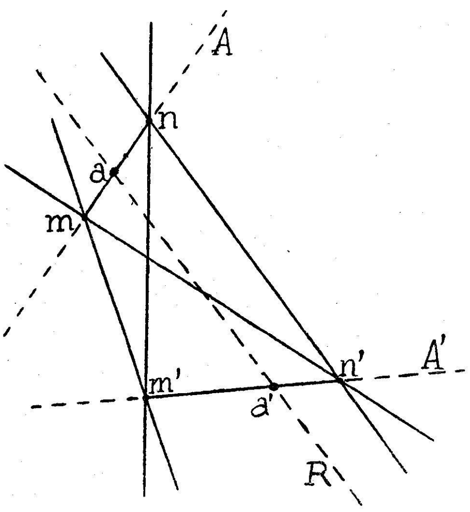

Fig. 8.

$$d\Sigma = \frac{dL\ dL'}{r^2}\, sin\ \omega\ sin\ \omega'\ sin\ \varphi,$$

en ki formulo ω signas la angulo AR, ω' la angulo $A'R$, φ la edrangulo inter la planon AR k. $A'R$.

Ti formulo estas nenio alia, ol la Gauss'a formulo, kun la sola difero, ke Gauss ne parolas pri tordivan solidangulon, sed nur pri konusan solidangulon; efekte la tordiva angulo $(mn,\ m'n')$ estas eqala ye la konusa angulo, naskita per un punkto m, kiu migras dey m til n kay regardas la segmento $m'n'$, or per fixa punkto m, kiu regardas segmento $m'n'$, migranta ye disto dL en direkto de mn.

Seqe, se P, Q, estas du irg nin punkton, markitan sur la fokusa kurvo C, kay P', Q', du irg nin punkton, markitan sur la fokusa kurvo C', la koresponda tordiva solidangulo de la kongruenco estos:

$$\Sigma = \int_P^Q \int_{P'}^{Q'} \frac{dL\ dL'}{r^2}\, sin\ \omega\ sin\ \omega'\ sin\ \varphi,$$

[1] Mi elektis kongruenco posesanta fokusan kurvon, kar la kompreno estas pli facila en ti kazo, ol en la kazo de fokusan surfacon. Tamor, la aqerotan rezulton valoras ulsor por omnin kazon.

kay la sumita solidangulo de la kongruenco estos recevata per integralado cirker la klozan kurvon C k. C':

$$\Sigma = \int\limits_C \int\limits_{C'} \frac{dL\ dL'}{r^2}\ sin\ \omega\ sin\ \omega'\ sin\ \varphi = 4\ k\pi,$$

en kiu k signas la nombro de foyon, ye kiu kurvon C k. C' e su krucas, kie chenunon de cheno.

Ti formulo estas aplikibla al la teorio de elektromagnetismo por kalkuli la interago inter du elektran fluon C k. C'.

Fine, la fundamenta tridimensia grando en tridimensia spaco estas la *volumo,* t. e. la nombro de punkton lokantan intre de klozita surfaco S, or la nombro de edron sekcantan ti surfaco. Volumo estas do punktedrara grando.

REMARKO PRI LA SIMBOLO i. — Nu diris ci-sure, ke faktoro i $(= \sqrt{-1})$ transformas punkto P en reglo R; alivorte la produto de i kay de irg ni punktlongo L estas homogena kun reglangulo ϑ, or λ. Simile, faktoro i transformas reglo R en edro E, alivorte la produto de i kay de irg ni reglangulo ϑ, or λ, estas homogena kun edrangulo l. Oni do havas:

$$(iL) = (\lambda) \quad \text{kay} \quad (i\lambda) = (l),$$

seqe:

$$(l) = (i\lambda) = (i^2 L) = (-L);$$

kay tio signifas, ke: *edrangulo* = *minus longo,*[1] or: *edro* = *minus punkto.* Exemple, se n estas la nombro, kiu mezuras la disto inter du punkton P k. P', kay se (L) estas la longuno, la longo PP' (nombro de punkton lokantan inter P k. P') estos: $n(L)$; se oni strekas du reglon R k. R', paralelan inter su ye disto PP', la nombro de paralelan reglon kushantan inter R k. R' estos n (kar ti nombro estas la sama, ol la nombro de punkton inter P k. P'), sed la reglara grando formata da tin paralelan reglon ne plu estos $n(L)$, sed $n(iL)$; fine, se oni strekas du edron E k. E', paralelan inter su ye sama disto PP', la nombro de paralelan edron lokantan inter E k. E' ulsor estos n, sed la edrara grando formata da tin paralelan edron ne plu estos $n(L)$, sed $n(i^2 L)$, t. e.: $n(-L)$, slo la homogena vidpunkto.

Oni do ritruvas ci tiey la dusexeco de spaco, kar punkto aperas naw, kom plusa $(+1)$, or vira, spacelemento, dur ke edro aperas, kom minusa (-1), or virina, spacelemento; fine, la reglo aperas kom hermafrodita elemento $(\pm i)$, kar irg ni reglo estas konceptibla, kom rekto, cor punktara cor edrara.

[1] Oni ne mixu *minus longo* kun *longo minusa.*