

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 19 (1917)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE
Autor: Turrière, Emile
Kapitel: problème de Bhaskara et les équations
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-17321>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

qui, après développement, donne encore une équation de Brahmagupta-Fermat du quatrième ordre.

La réciproque n'est pas exacte. Toute équation

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = y^2$$

ne serait susceptible d'être rattachée à un problème d'arithmodistance pour une arithmoconique de l'espace, ni *a fortiori* pour une arithmoconique de l'espace. Les équations pour lesquelles A et E ne sont pas sommes de deux ou trois carrés ne sont pas susceptibles d'une telle interprétation géométrique : par exemple aucune des équations

$$y^2 = x^4 - 1, \quad y^2 = x^4 + 7,$$

ne peut être associée à une arithmoconique de l'espace ou du plan au titre de courbe représentative de l'équation du problème des arithmodistances.

Le problème de Bhaskara et les équations

$$\varphi(x, y) = u^2, \quad \psi(x, y) = v^2.$$

54. — LE PROBLÈME DE BHASKARA. — Le système des deux équations indéterminées

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= u^2, \\ x^2 - y^2 - 1 &= v^2, \end{aligned}$$

à quatre inconnues x, y, u, v , dont BHASKARA¹ a donné les trois solutions particulières suivantes dépendant d'un paramètre rationnel arbitraire

$$\left\{ \begin{aligned} x &= 8\lambda^2 + 1, & y &= 8\lambda^2, \\ x &= \lambda + \frac{1}{2\lambda}, & y &= 1, \\ x &= \frac{(8\lambda^2 - 1)^2}{8\lambda^2}, & y &= \frac{8\lambda^2 - 1}{2\lambda}, \end{aligned} \right.$$

¹ Le *Lilavati*, section IV, règle 59-60. Cf. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, question 206, [2], t. VIII, 1849, p. 107; E. CLÈRE en donna une solution incomplète, t. IX, 1850, pp. 116-118.

et dont la solution générale a été obtenue par A. GENOCCHI², pourrait de diverses manières être rattaché aux considérations qui précèdent, en supposant que l'une des inconnues prend une valeur précisée, ou encore que u et v , par exemple, sont deux fonctions linéaires d'une variable z à coefficients rationnels et connus. On pourrait aussi songer à des considérations d'hypergéométrie.

Je me bornerai à signaler que le système des deux équations de Bhaskara est équivalent au système suivant :

$$2(x^2 - 1) = u^2 + v^2, \quad 2y^2 = u^2 - v^2;$$

il suffit de poser

$$\begin{aligned} u + v &= 2y\lambda, & u - v &= \frac{y}{\lambda}, \\ 2\frac{x}{y} &= X, & \frac{2}{y} &= Y, \end{aligned}$$

pour réduire toute la question à l'étude arithmogéométrique d'une surface *unicursale* du quatrième degré d'équation

$$X^2 - Y^2 = 4\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}$$

en coordonnées cartésiennes (X, Y, λ) . En posant alors

$$X + Y = \frac{4\lambda^4 + 1}{\lambda\mu}, \quad X - Y = \frac{\mu}{\lambda},$$

il vient ainsi :

$$x = \frac{4\lambda^4 + 1 + \mu^2}{4\lambda^4 + 1 - \mu^2}, \quad y = \frac{4\lambda\mu}{4\lambda^4 + 1 - \mu^2}.$$

Telle est la solution générale dépendant de deux paramètres rationnels arbitraires, λ et μ , des deux équations de Bhaskara.

55. — Les équations, analogues aux précédentes,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 1 &= u^2, \\ x^2 + y^2 - 1 &= v^2, \end{aligned}$$

² Angelo GENOCCHI, Solution de la question 206, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, [2], t. X, 1851, p. 80-85.

se traitent de la même manière. Elles sont équivalentes aux équations

$$\begin{aligned} 2 &= u^2 - v^2 , \\ 2(x^2 + y^2) &= u^2 + v^2 ; \end{aligned}$$

en posant donc

$$u = \lambda + \frac{1}{2\lambda} , \quad v = \lambda - \frac{1}{2\lambda} ,$$

l'étude de ces équations est ramenée à celle d'une surface unicursale du quatrième degré représentée par l'équation (en coordonnées cartésiennes x, y, λ) :

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 + \frac{1}{4\lambda^2} .$$

Cette surface peut être envisagée comme engendrée par un arithmocercle passant par l'arithmopoint $(x = \lambda, y = \frac{1}{2\lambda})$, de sorte que les expressions rationnelles des coordonnées d'un point quelconque de la surface s'obtiennent en posant $\text{tang} \frac{\theta}{2} = t$ et

$$\begin{cases} x = \lambda \cos \theta + \frac{1}{2\lambda} \sin \theta , \\ y = \lambda \sin \theta - \frac{1}{2\lambda} \cos \theta . \end{cases}$$

La solution générale du système des deux équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = u^2 , \\ x^2 + y^2 - 1 = v^2 , \end{cases}$$

est ainsi

$$x = \frac{\lambda(1 - t^2) + \frac{t}{\lambda}}{1 + t^2} , \quad y = \frac{2\lambda t - \frac{1 - t^2}{2\lambda}}{1 + t^2} .$$

56. — Le système formé par les deux équations simultanées, encore analogues aux équations de Bhaskara :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= u^2 , \\ x^2 - y^2 + 1 &= v^2 , \end{aligned}$$

peut être traité par un procédé semblable, à la seule différence que la surface unicursale qui se présente ici est du troisième degré. De l'équation

$$2x^2 = u^2 + v^2$$

et des résultats du § 5, il résulte qu'il faut poser actuellement

$$u = x(\cos \theta + \sin \theta) ,$$

$$v = x(\cos \theta - \sin \theta) ,$$

$\text{tang } \frac{\theta}{2} = t$ étant un nombre rationnel arbitraire. En portant ensuite ces expressions de u et de v dans l'équation

$$u^2 - v^2 = 2(y^2 - 1) ,$$

il vient

$$t(1 - t^2) = \frac{(1 + t^2)^2}{4x^2} (y^2 - 1) ,$$

de sorte que l'étude des équations proposées est réductible à celle d'une surface cubique unicursale d'équation

$$Z(1 - Z^2) = X^2 - Y^2 .$$

Les expressions générales des solutions (x, y) , en fonction de deux paramètres, obtenues par ce procédé, sont les suivantes :

$$x = \frac{2\lambda(1 + t^2)}{2\lambda^2 t(1 + t^2) - 1} , \quad y = \frac{2\lambda^2 t(1 + t^2) + 1}{2\lambda^2 t(1 + t^2) - 1} .$$

57. — THÉORÈME FONDAMENTAL SUR LES ÉQUATIONS SIMULTANÉES

$$\varphi(x, y) = u^2 , \quad \psi(x, y) = v^2 .$$

Les équations de Bhaskara et autres équations analogues qui viennent d'être résolues dans les trois paragraphes précédents appartiennent à la classe très générale d'équations du type $\varphi(x, y) = u^2$, $\psi(x, y) = v^2$, ou φ et ψ sont deux polynômes à coefficients rationnels en x et y , et qui sont douées d'une solution particulière manifestement connue *a priori* : les équations de Bhaskara sont ainsi douées de la solution

$(x = 1, y = 0)$; les équations du § 56 sont douées de la solution $(x = 0, y = 1)$. Quant aux équations du § 55, il est facile d'obtenir une solution telle que $x = \frac{1}{2}, y = 1$.

Il est important d'observer que le problème actuel de deux équations à quatre indéterminées, qui semblerait se rattacher à des considérations d'arithmogéométrie pour un hyperespace à quatre dimensions est réductible à une étude arithmogéométrique d'une surface de l'espace ordinaire.

D'une manière précise et en se bornant, pour fixer les idées, au cas de deux équations quadratiques simultanées, il y a lieu d'énoncer le théorème fondamental suivant :

Le système formé par deux équations simultanées quadratiques à quatre inconnues

$$\varphi(x, y) = u^2, \quad \psi(x, y) = v^2,$$

n'admet pas de solution en général. La connaissance d'une solution particulière entraîne la réductibilité de la question à l'étude arithmogéométrique d'une surface cubique.

Soit, en effet, (x_0, y_0, u_0, v_0) la solution connue *a priori*. Je pose alors

$$x = x_0 + \alpha t, \quad y = y_0 + \beta t, \quad u = u_0 + \gamma t, \quad v = v_0 + \delta t,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, t$ étant cinq indéterminées. Chacune des équations quadratiques données admet la solution $t = 0$ et peut être résolue par rapport à t , de sorte que l'on obtient ainsi deux expressions différentes de t

$$t = \frac{\Phi_1}{\Phi_2}, \quad t = \frac{\Psi_1}{\Psi_2},$$

sous formes de fractions rationnelles dont les numérateurs sont des formes linéaires en $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ tandis que les dénominateurs sont des formes quadratiques par rapport aux mêmes variables. Il résulte de cette remarque que toute la question est réduite à l'étude arithmogéométrique de la surface du troisième degré dont l'équation est

$$\Phi_1 \Psi_2 - \Psi_1 \Phi_2 = 0$$

dans le système de coordonnées homogènes $(\alpha \beta \gamma \delta)$.

La réductibilité à l'étude arithmogéométrique d'une surface de l'espace ordinaire n'est évidemment pas particulière aux systèmes d'équations quadratiques. Lorsqu'en effet les équations $\varphi = u^2$ et $\psi = v^2$ à étudier sont de degrés plus élevés, la méthode précédente conduit à deux équations algébriques en t ; l'élimination de t permet alors de se ramener à l'étude d'une relation unique entre $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, homogène par rapport à ces mêmes variables.

La réductibilité à l'étude d'une surface cubique de l'espace ordinaire du système des deux équations quadratiques $\varphi(x, y) = u^2$ et $\psi(x, y) = v^2$ étant acquise, il faut maintenant observer que les conclusions du § 36 peuvent en outre être appliquées à la nouvelle équation cubique. *La surface cubique obtenue est précisément douée de trois arithmopoints non-singuliers.* Ce sont les arithmopoints de coordonnées respectives

$$\begin{aligned} \alpha &= 0, & \beta &= 0, & \gamma &= 0, & \delta &\neq 0, \\ \alpha &= 0, & \beta &= 0, & \gamma &\neq 0, & \delta &= 0, \\ \alpha &= 0, & \beta &= 0, & \gamma &= u_0, & \delta &= v_0, \end{aligned}$$

c'est-à-dire deux des sommets du tétraèdre de référence et un troisième point de l'arête qui les joint. La connaissance d'un seul de ces arithmopoints suffit pour assurer et diriger par le procédé du § 36 la représentation rationnelle de la surface cubique au moyen de deux paramètres indépendants.

Dans ces conditions, la *connaissance d'une solution particulière du système d'équations quadratiques généralisées de Bhaskara entraîne la résolubilité du système; la solution dépend de deux paramètres.* Si la représentation trouvée de la surface cubique est propre, cette solution est la solution générale.

Arithmogéométrie autour des cubiques de Lucas.

58. — Pour un nombre assez considérable d'équations indéterminées ayant été l'objet de recherches spéciales, le groupement $x^2 + y^2 + z^2$ intervient dans la structure de ces équations. Il semble donc qu'il y ait intérêt — et effective-