§1. — Congruences linéaires de cubiques gauches.

où les formes φ sont linéaires et homogènes par rapport aux paramètres α_1, α_2, α_3, et par rapport aux coordonnées x_0, x_1, x_2, x_3 de l'espace. Le second a déterminé les types de congruences linéaires de classe un, c'est-à-dire les congruences linéaires telles qu'une droite quelconque ne soit en général la bisécante que d'une seule cubique de la congruence.

Nous avons d'autre part rencontré, dans des travaux publiés de 1908 à 1911, de nombreux types de congruences linéaires de cubiques gauches.

Le second problème est, au contraire du premier, complètement résolu par un théorème de M. Enriques [1].

On peut toujours trouver une transformation birationelle de l'espace transformant les cubiques gauches d'une congruence linéaire en les droites d'une gerbe.

Dans la première partie de cette note, nous démontrerons d'une façon élémentaire le théorème de M. Enriques, en construisant la transformation birationnelle.

Dans la deuxième partie, après avoir démontré qu'une congruence d'ordre deux formée de cubiques gauches est rationnelle, nous construirons une transformation (1, 2) changeant cette congruence en une gerbe de droites.

§ 1. — *Congruences linéaires de cubiques gauches.*

1. — Soit Σ une congruence linéaire de cubiques gauches C. Les cubiques C découpent, sur un plan générique de l'espace, des groupes de trois points formant une involution. Or, M. Castelnuovo a démontré [2] qu'une involution plane est rationnelle; par conséquent : *la congruence Σ est rationnelle.*

2. — Considérons une congruence linéaire G de droites d, une collinéation Ω et un point P ne possédant aucune propriété particulière par rapport à la congruence Σ.

Σ étant rationnelle, on peut établir, entre les courbes C

---

[1] *Mathematische Annalen,* 1895. En réalité, le théorème de M. Enriques est plus complet, il s'étend aux congruences linéaires de courbes gauches rationnelles d'ordre impair.

[2] *Mathematische Annalen,* 1893.

de Σ et les droites d de G, une correspondance birationnelle T, par un procédé que nous laissons indéterminé.

Considérons un point A. Par A passe une droite d de G et en général une seule. A cette droite d, T fait correspondre une cubique C de Σ. Par P passe une seule bisécante b de C (en général). A cette bisécante, Ω fait correspondre une droite ne passant pas en général par A. Cette droite détermine, avec A, un plan auquel Ω fait correspondre un plan passant par b et rencontrant C en un seul point B, non situé sur b. Remarquons que lorsque A décrit une droite d de G, B décrit la cubique correspondante de Σ.

Inversement, partons d'un point B et faisons les constructions nous ramenant à un point A. Par B passe une cubique C de Σ et en général une seule. Par P passe une bisécante b de C. T fait correspondre à C une droite d de G et Ω fait correspondre au plan (b, B) un plan rencontrant d en général en un seul point A.

Nous venons de définir, entre les points A et B, une correspondance birationnelle changeant une cubique C de Σ en une droite d de G ; par suite :

On peut toujours transformer birationnellement une congruence linéaire de cubiques gauches en une congruence linéaire de droites.

En particulier, une congruence linéaire de droites étant birationnellement identique à une gerbe de rayons, le théorème que nous avons en vue est démontré.

3. — Dans certains cas, la construction de la correspondance (A, B) peut être simplifiée. Si par exemple les cubiques gauches C de Σ ont une bisécante fixe δ, on prendra le point P sur cette droite. Les droites que nous avons désignées plus haut par b se confondent toutes avec δ. Il n'est plus nécessaire de définir une collinéation Ω, mais seulement une projectivité entre le faisceau de plans d'axe δ et un faisceau de plans dont l'axe ne passe par aucun point singulier de G. Une étude approfondie de cette transformation conduirait sans doute à la détermination de tous les types de congruences linéaires de cubiques gauches ayant une bisécante fixe.