problème des distances rationnelles.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1916)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

est un carré. Il résulte de ces deux remarques que, si un triangle de l'espèce considérée était rectangle, sa surface serait mesurée par un carré parfait, ce qui serait contraire à un théorème de Fermat sur les triangles pythagoriques. Par suite :

Aucun triangle de l'espèce considérée ne saurait être un triangle rectangle.

Le problème des distances rationnelles.

17. — D'une façon générale, étant donnés, dans le plan ou dans l'espace, une arithmocourbe (C) et un arithmopoint A, j'appellerai problème des distances rationnelles relatif à cette arithmocourbe et à l'arithmopoint donné le problème suivant: déterminer parmi les arithmopoints de l'arithmocourbe (C) ceux qui sont situés à une distance rationnelle de l'arithmopoint.

Tout d'abord, il y a lieu de se rendre compte de la réduction du problème des distances rationnelles à l'étude arithmogéométrique d'une autre courbe plane. Soient, en effet, les expressions rationnelles en fonction d'un paramètre t,

$$x = x(t)\ , \qquad y = y(t)\ , \qquad z = z(t)\ ,$$

des coordonnées de l'arithmopoint courant M de l'arithmocourbe (C); soient d'autre part a, b, c les coordonnées rationnelles de l'arithmopoint imposé A. Les axes coordonnés étant essentiellement rectangulaires, on posera :

$$\overline{\mathrm{AM}}^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = [f(t)]^2 . g(t)$$

$f(t)$ et $g(t)$ étant des fonctions rationnelles de t ; la seconde, $g(t)$, ne contient aucun facteur carré. De cette expression, il résulte que le problème des distances rationnelles équivaut, dans le cas le plus général, à la recherche des arithmopoints de la courbe représentée par l'équation $\mathrm{Y}^2 = g(\mathrm{X})$.

18. — *Le problème des distances rationnelles pour une* *arithmodroite.* L'arithmodroite considérée sera supposée représentée par les équations

$$x = \mathrm{A}t + \mathrm{A}' , \qquad y = \mathrm{B}t + \mathrm{B}' ;$$

de l'expression de $\overline{\mathrm{AM}}^2$,

$$\overline{\mathrm{AM}}^2 = (\mathrm{A}t + \mathrm{A}' - a)^2 + (\mathrm{B}t + \mathrm{B}' - b)^2 ,$$

il résulte que la question est réductible à l'étude arithmogéométrique de l'hyperbole représentée par l'équation :

$$\mathrm{Y}^2 = (\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2)\mathrm{X}^2 + 2[\mathrm{A}(\mathrm{A}' - a) + \mathrm{B}(\mathrm{B}' - b)]\mathrm{X} + (\mathrm{A}' - a)^2 + (\mathrm{B}' - b)^2 .$$

Une première conséquence de cette réductibilité à l'étude arithmogéométrique d'une conique est que *si, dans le cas d'une arithmodroite, le problème des distances rationnelles pour un arithmopoint donné admet une solution particulière, il en admet une infinité.*

Lorsque l'arithmodroite imposée est une de celles que j'ai nommées *des arithmodirigées,* la distance de tout point rationnel du plan à une telle droite est toujours rationnelle et cette propriété est caractéristique des arithmodirigées. Il résulte de cette remarque que, dans le cas d'une arithmodirigée, le problème des distances rationnelles admet toujours une solution particulière : la projection de l'arithmopoint A donné sur l'arithmodirigée, projection qui est nécessairement un arithmopoint. D'après ce qui précède, le *problème des distances rationnelles relatif à une arithmodirigée et à un arithmopoint quelconque est donc toujours possible et admet une infinité de solutions.*

19. — Le problème des distances rationnelles pour une arithmodirigée et un arithmopoint pris sur elle est évidemment résolu par tous les arithmopoints de l'arithmodirigée. Cette propriété s'étend à d'autres arithmocourbes.

Soit, en effet, un arithmopoint imposé de coordonnées (x_0, y_0) ; le problème des distances rationnelles pour cet arithmopoint et une arithmocourbe plane sera résolu par tous les arithmopoints de cette arithmocourbe, si l'expression $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ est le carré d'une expression rationnelle du paramètre rationnel t qui repère l'arithmopoint courant de l'arithmocourbe. On devra donc avoir :

$$\begin{cases} x = x_0 + (1 - t^2) \cdot f(t) \; , \\ y = y_0 + 2t \cdot f(t) \; ; \end{cases}$$

ces formules dans lesquelles $f(t)$ est une fonction rationnelle quelconque de t représentent l'arithmocourbe du plan la plus générale qui jouisse de la propriété spécifiée.

L'arithmopoint imposé étant pris pour pôle, l'équation polaire d'une telle courbe est de la forme générale

$$r = f\left(\operatorname{tang} \frac{\theta}{2}\right)$$

f étant une fonction rationnelle arbitraire de $\operatorname{tang} \frac{\theta}{2}$. La strophoïde, les coniques rapportées à un foyer en sont les exemples les plus simples. *Les arithmoconiques sont d'ailleurs doublement solution de la question,* en raison de l'existence de deux foyers, *lorsque ces deux foyers sont deux arithmopoints.*

20. — *Application du problème des distances rationnelles aux arithmotriangles héroniens.* Donnons-nous arbitrairement, dans le plan, une arithmodirigée (D) et un arithmopoint A ; soient alors B et C deux arithmopoints quelconques de (D), uniquement assujettis à la condition d'appartenir aux solutions, en nombre infini, du problème des distances rationnelles relatif à (D) et à A. La distance BC est rationnelle ; de même AB et AC sont mesurées par des nombres rationnels, aux titres de solutions du problème des distances rationnelles ; de sorte que le triangle ABC a ses trois côtés rationnels ; la hauteur issue de A est en outre rationnelle, comme distance d'un arithmopoint à une arithmodirigée. D'où il résulte que le triangle ABC est un arithmotriangle héronien.

Cette méthode de génération des arithmotriangles héroniens est susceptible d'être présentée sous une nouvelle forme, en partant de cette remarque que AB et AC sont des arithmodirigées. Considérons d'une manière générale trois arithmodirigées quelconques ; elles constituent un triangle dont les sommets sont trois arithmopoints ; les côtés et les hauteurs de ce triangle sont, d'après les propriétés fondamentales des arithmodirigées, mesurées par des nombres rationnels. D'où il résulte que *trois arithmodirigées quelconques du plan définissent toujours un arithmotriangle héronien.*

La représentation analytique générale suivante des arithmotriangles héroniens du plan résulte immédiatement de cette proposition. Il suffit de prendre pour équations des côtés du triangle les trois équations suivantes :

$$x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 = p_1 \;,$$

$$x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 = p_2 \;,$$

$$x \cos \alpha_3 + y \sin \alpha_3 = p_3 \;;$$

dans ces trois équations, p_1, p_2, p_3, sont trois nobresm rationnels ; les azimuts α_1, α_2, α_3 sont quelconques, mais tels que tang $\frac{\alpha_1}{2}$, tang $\frac{\alpha_2}{2}$ et tang $\frac{\alpha_3}{2}$ sont eux aussi des nombres rationnels.

Le 20 septembre 1915.