II. — Le hasard objectif. — Les notions de complication, de brassage parfait et d'indépendance. Les notions de relativité et d'approximation appliquées au hasard objectif.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **18 (1916)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

caractère commun : elles ne seront pas certaines, elles ne seront que « probables ». Par contre, la succession de ces événements forme des *suites* présentant certains caractères de symétrie, disons mieux, de « pseudo-symétrie ». Leur étude constitue la *Théorie des Probabilités.*

Nous nous proposons dans ce qui suit d'exposer rapidement ces caractères fondamentaux.

5. — Les deux sortes de hasard ci-dessus spécifiées suffisent à caractériser complètement l'emploi du hasard dans les sciences.

Les théories statistiques ordinaires, les théories cinétiques de Maxwell-Boltzmann appartiennent au hasard objectif.

Par contre, la Mécanique statistique de Gibbs repose uniquement sur le hasard subjectif ; ce dernier a reçu en outre des applications importantes dans la théorie des équations différentielles, le problème des n corps (Poincaré), etc., et la théorie des nombres (Borel).

II. — Le hasard objectif. — Les notions de complication, de brassage parfait et d'indépendance. Les notions de relativité et d'approximation appliquées au hasard objectif.

6. — Imaginons, alignées les unes à côté des autres, k cases numérotées de 1 à k et, sur chaque case, une carte d'un jeu de k cartes également numérotées de 1 à k.

Nous allons supposer que ces cartes sont permutées sur les cases par une *machine,* suivant une certaine loi.

Nous ferons le relevé périodique aux temps t_0, $t_0 + \tau$, $t_0 + 2\tau$, ..., $t_0 + (n - 1)\tau$, des distributions réalisées à ces instants, et nous les noterons pour obtenir un diagramme de la marche du phénomène.

Les cartes sur les cases peuvent former $k!$ distributions différentes :

$$D_1, D_2, D_3, D_4, \ldots, D_i, \ldots, D_{k!}.$$

Selon la loi, un plus ou moins grand nombre de ces distributions seront réalisées successivement aux époques considérées.

Cela posé, supposons d'abord que la loi est simple, c'est-à-dire exprimable par une relation analytique simple ou par un petit nombre de mots. Il sera possible dans ce cas de trouver une carte portant le numéro j, et h cases de rangs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$, telles que ladite carte ne se trouve pas du tout, en moyenne, à peu près h fois sur k sur l'une des cases choisies. Mais à mesure que la loi deviendra de plus en plus compliquée, il sera de plus en plus difficile de trouver la carte et la ou les cases qui réalisent ces conditions. Le rapport observé tendra vers $\frac{h}{k}$.

Or, si compliquée que nous imaginions une machine, elle ne pourra pas être infiniment compliquée, autrement dit, il arrivera un moment $t_0 + (N - 1)$ où la distribution initiale se reproduira et où toutes les distributions suivantes se succéderont toujours dans un même ordre : le phénomène sera périodique

Sur les N distributions que comporte la période, la distribution D_i apparaîtra un certain nombre de fois N_i; en appelant n_i le nombre de fois que cette distribution apparaîtra pendant les n observations, on aura évidemment :

$$\frac{n_i}{n} = \frac{N_i}{N} = \text{constante} = r_i \,, \tag{1}$$

d'où :

$$\Delta_i = n_i - nr_i = 0 \,. \tag{2}$$

Si tous les rapports r_i étaient nuls à l'exception d'un seul nous dirions que la machine est *au repos*. C'est le cas le plus simple.

Il est essentiel de remarquer que le nombre N de distributions dont se compose la période, peut être aussi grand que l'on veut, et cela quel que soit k, pourvu que $k \geqq 2$; nous pouvons, autrement dit, imaginer des périodes aussi longues que nous voulons. Pour un N et un k donnés, leur nombre sera k^N.

7. — Dans le cas limite où N est infini, la période comprendra une infinité d'éléments ; nous dirons que la loi est *infiniment compliquée.*

8. — Ainsi, nous sommes en état de créer des lois infiniment compliquées. La question intéressante qui se pose maintenant est la suivante : comment peut-on imaginer un système évoluant suivant une telle loi ?

Une idée se présente immédiatement à l'esprit : rassembler les cartes en paquet, les battre par un certain nombre de coups m, puis les replacer sur les cases dans l'ordre obtenu, l'opération étant recommencée n fois de suite.

Nous avons en effet la conviction que le système *opérateur-cartes* considéré n'est pas périodique. Les mouvements qui président à la formation des distributions sont si compliqués que nous devons complètement renoncer à en découvrir les lois. Mais, si notre pouvoir discriminatif trop faible ne nous permet pas d'apercevoir ces lois, il permet toutefois de distinguer quelque chose d'approchant. En effet, les mouvements de l'opérateur ne sont pas complètement *décoordonnés,* et c'est ce que nous exprimons en disant que l'opérateur a certaines *habitudes.* Comment ces habitudes se manifestent-t-elles ? Par le fait que certaines distributions se présenteront plus fréquemment que d'autres. Ainsi, nous aurons des degrés de fréquence différents dans l'apparition des diverses distributions, et, semble-t-il, nous revenons aux périodes. Mais, est ceci est l'essentiel, ce ne seront plus de vraies périodes, ce seront des pseudo-périodes, plus ou moins bien marquées ; les fréquences sont *relatives,* comme nous le verrons dans un instant.

Auparavant, nous devons écarter une difficulté. Nous savons que le système opérateur-cartes à un instant donné n'est jamais identique à ce qu'il était un instant auparavant ; autrement dit, ce système se transforme constamment, et, remarquons-le, c'est peut-être pour cette raison qu'il n'est pas périodique. Il en résultera que, si n est très grand, nous risquons de voir les habitudes du joueur se modifier sensiblement. Pour établir la théorie, nous nous trouverons ainsi tout naturellement conduit à schématiser le système en imaginant un opérateur fictif capable de garder indéfiniment des habitudes invariables. Dans ce cas, il sera possible de définir les pseudo-fréquences par des nombres ϖ_i invariables pour chaque distribution D_i. Nous ne pourrons plus, bien entendu, définir les nombres N et N_i, mais nous pourrons considérer des nombres :

$$\begin{array}{lll} n\ , & n'\ , & n''\ , \ldots \\ n_i\ , & n_i'\ , & n_i''\ , \ldots \end{array}$$

tels que les rapports

$$\frac{n_i}{n}\ , \quad \frac{n_i'}{n}\ , \quad \frac{n_i''}{n}\ , \ldots$$

tendent vers une limite bien déterminée lorsque n, n', n'', ... augmentent indéfiniment; c'est ce que nous résumerons par l'expression :

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty} \frac{n_i}{n} = \varpi_i\ . \tag{1'}$$

Nous dirons que ϖ_i est la *probabilité objective* pour qu'une des distributions soit la distribution D_i ; c'est la *fréquence relative* d'apparition de cette distribution.

Comme on le voit, la relation (1') est l'analogue de la relation (1); mais la relation (1') n'est valable rigoureusement qu'à la limite. Cela concorde avec le fait que la période, dans ce cas, est infinie[1].

De même, la relation (2) ne sera plus valable. Les différences :

$$\Delta_i = n_i - n\varpi_i$$

$$\Delta_i' = n_i' - n'\varpi_i$$

$$\Delta_i'' = n_i'' - n''\varpi_i$$

que nous appellerons *écarts absolus,* augmentent au delà de

[1] M. L. Bachelier a montré aussi d'une autre façon qu'une suite d'événements fortuits a une période infinie (*L'Enseign. math.*, 1915, p. 5).

toute limite. Par contre, en vertu de (1′), les *écarts relatifs bruts :*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{n}, \qquad x_i' = \frac{\Delta_i'}{n'}, \qquad x_i'' = \frac{\Delta_i''}{n''}, \ldots$$

tendront vers 0. En introduisant l'*écart étalon* e_i par l'expression :

$$e_i = \sqrt{\frac{2\varpi_i(1 - \varpi_i)}{n}},$$

et l'*écart relatif* λ par la relation

$$\lambda = \frac{x}{e},$$

l'Analyse combinatoire permet de montrer que les fréquences relatives, ou probabilités objectives des écarts relatifs λ, obéissent à la loi suivante, lorsque n est très grand :

$$\Theta(\lambda) = \int_{-\lambda}^{+\lambda} e^{-\lambda^2} d\lambda.$$

C'est la *loi fondamentale des écarts.* En remontant, elle permet de calculer les fréquences relatives des écarts x et Δ.

9. — En résumé, *une loi infiniment compliquée ne peut être contenue dans une expression analytique nous permettant d'en déterminer une partie quelconque. Par contre,* ses propriétés d'ensemble *sont complètement caractérisées par les quantités que nous avons appelées* écarts *et qui satisfont à un critère analytique simple.*

10. — La question fondamentale qui se pose à nous maintenant est celle de savoir comment varient les quantités ϖ_i avec le nombre de battements m et les habitudes de l'opérateur. Nous poserons le problème de la façon suivante :

« Si, avant de battre le jeu, les cartes sont dans un certain ordre que nous prendrons comme initial, que peut-on dire de l'ordre final des cartes après m battements ? »

Ce problème a été étudié par Poincaré. Nous ne suivrons pas ce savant dans les développements mathématiques difficiles qu'il donne dans son *Calcul des Probabilités.* Nous nous contenterons d'indiquer brièvement la position de la question en nous basant sur l'exposé élémentaire de la préface de cet ouvrage.

Considérons un opérateur qui bat un jeu de cartes. A chaque battement, l'ordre des cartes est interverti, et il peut l'être de plusieurs manières. Supposons trois cartes seulement pour simplifier l'exposition. Les cartes qui, avant le premier battement, occupaient respectivement les rangs 123, pourront, après le premier battement, occuper les rangs

$$123\ ,\quad 231\ ,\quad 312\ ,\quad 321\ ,\quad 132\ ,\quad 213\ .$$

Chacune de ces permutations est possible, mais elles ont des fréquences relatives d'apparition qui dépendront et caractériseront les habitudes de l'opérateur, supposées invariables. Nous les désignerons respectivement par :

$$p_1\ ,\quad p_2\ ,\quad p_3\ ,\quad p_4\ ,\quad p_5\ ,\quad p_6\ ;$$

la somme de ces six quantités est égale à 1.

Au second battement et aux suivants, cela recommencera et dans les mêmes conditions ; p_4, par exemple, représente toujours la fréquence relative de la permutation qui fait passer les cartes des rangs 1, 2, 3 aux rangs 321.

Cela posé, on peut démontrer que si le nombre m de battements est très grand, les cartes qui, avant le premier battement, occupaient les rangs 1, 2, 3, pourront, après le dernier battement, occuper *à peu près indifféremment* les rangs

$$123\ ,\quad 231\ ,\quad 312\ ,\quad 321\ ,\quad 132\ ,\quad 213\ ;$$

autrement dit, les fréquences relatives de ces six ordres sont sensiblement les mêmes et égales approximativement à $\frac{1}{6}$; nous dirons que l'ordre final des cartes est à peu près *indépendant* de l'ordre initial. Cela sera vrai quels que soient les nombres $p_1, \ldots, p_6$, c'est-à-dire les habitudes du joueur. Le grand nombre de battements, c'est-à-dire la *complexité* des causes, a produit l'*indépendance.*

Il y aurait une exception toutefois si l'un des nombres p était égal à 1 et les autres nuls. Les conditions seraient trop simples.

Enfin, si tous les nombres p étaient égaux entre eux, n'importe lequel des six ordres possibles apparaîtrait au premier battement : l'indépendance serait réalisée au premier coup.

11. — Voyons maintenant les conséquences que nous pourrons tirer de l'analyse sommaire qui précède.

Pratiquement, on peut distinguer deux cas principaux :

1° L'opérateur a de fortes habitudes, l'un des p est voisin de 1, les autres voisins de 0. Dans ce cas, m devra être très grand, c'est-à-dire l'opérateur devra battre le jeu un très grand nombre de fois pour que l'ordre final soit à peu près indépendant de l'ordre initial.

2° L'opérateur n'a presque pas d'habitudes, les différents p sont tous à peu près égaux entre eux. Dans ce cas m pourra être relativement petit.

12. — Introduisons maintenant les *limites* des deux cas précédents. Pour cela, nous imaginerons des opérateurs fictifs :

1° ou bien qui n'ont aucune habitude ;

2° ou bien qui ont certaines habitudes, mais peuvent effectuer un nombre infini de battements en un temps fini, très court, τ.

Pour abréger, nous pourrons appeler *démons*[1] ces opérateurs fictifs.

Nous conviendrons de dire que l'ordre final des cartes d'un jeu ainsi battu a été obtenu par le *brassage parfait*, et nous aurons immédiatement cette proposition :

L'ordre final des cartes, obtenu par le brassage parfait, ne dépend pas de l'ordre initial.

De plus, nous dirons que la succession des cartes dans l'ordre final forme une *loi infiniment compliquée parfaite.*

13. — Le passage à la limite que nous venons d'effectuer

[1] Ces démons s'opposent à ceux de Maxwell, qui sont des démons d'ordre, chargés du triage des molécules. On voit que s'il faut un démon, c'est-à-dire une impossibilité, pour mettre de l'ordre dans un système moléculaire, il en faut un également pour créer le désordre *parfait*.

permet de bien préciser les notions d'*indépendance* et de *complication infinie parfaites.*

Il faut remarquer, en effet, que pour la compréhension et l'emploi d'un concept, il est toujours avantageux d'abstraire de l'expérience une notion pure, par un passage à la limite convenable qui en donne la genèse, comme on le fait, par exemple, pour acquérir les notions de ligne droite, de corps solide, de mouvement rectiligne et uniforme, etc., autour desquelles viennent se grouper les lignes à peu près droites, les corps à peu près solides, etc., que nous voyons autour de nous [1]. Il est évident que le concept d'*indépendance parfaite* ne peut être qu'un concept limite, qui exige un « passage » pour devenir complètement intelligible. Ici, nous avons vu qu'on peut l'acquérir de deux façons distinctes, soit en imaginant des êtres capables de n'avoir aucune habitude, dont les mouvements, autrement dit, sont parfaitement décoordonnés, soit en imaginant des êtres comme nous, dans le mouvement desquels on peut apercevoir une certaine coordination ; mais alors, dans ce cas, l'indépendance ne pourra être parfaite que si le nombre de battements devient infini. Il y a là une discontinuité remarquable qui jette un jour précieux sur toute la question : lorsqu'on passe du premier cas au second, c'est-à-dire de celui où les p sont tous égaux à celui où les p diffèrent les uns des autres, le nombre de battements passe brusquement de la valeur 1 à une valeur infinie. Or, adopter le premier cas revient purement et simplement à postuler d'emblée l'indépendance parfaite. Le second cas nous montre que *sitôt que l'on introduit une* coordination, *si faible soit-elle, il faut une infinité de coups pour faire disparaître toute trace de l'ordre initial.*

Cela ne peut trop nous surprendre : si l'on veut que l'ordre final ne conserve « rien » de l'ordre initial, il nous paraîtra naturel de faire appel à l'idée d' « infini », seule l'idée d'infini étant compatible avec l'idée de « rien » pour notre esprit habitué à la détermination.

[1] La genèse et le rôle des passages à la limite ont été analysés avec une grande pénétration par M. J.-H. Boex-Borel (J.-H. Rosny aîné) dans l'ouvrage intitulé *Le Pluralisme*, Paris, F. Alcan, 1909.

14. — En ramenant la notion de hasard à la notion de loi, c'est-à-dire de succession, on réduit à néant l'idée mystérieuse qu'on s'en fait ordinairement, en le prenant à tort dans un sens absolu.

Il convient de remarquer d'abord que cette façon de procéder est la plus naturelle à notre esprit. Lorsqu'un astronome veut connaître la trajectoire d'une planète, il commence par en déterminer un grand nombre de points; puis, les joignant par un trait continu, il peut constater que la trajectoire est une ellipse. Jamais il ne lui viendrait à l'esprit d'essayer de trouver la trajectoire en partant d'un point unique ; ici, du reste, l'impossibilité saute aux yeux[1]. De même, la question si souvent posée dans les traités de probabilités: *Cet événement a-t-il lieu au hasard ou non ?* n'a pas de sens tant que l'on ne *situe* pas cet événement dans une *chaîne* d'événements.

15. — En outre, notre façon de procéder permet de bien préciser les différentes formes que revêtent nos relations avec les choses.

Il importe de remarquer, en effet, qu'une même relation est souvent susceptible de bien des formes différentes, que quelques-unes de ces formes peuvent être simples tandis que d'autres sont très ou même infiniment compliquées. Autrement dit, là comme ailleurs, les notions sont *relatives*, et l'on est parfaitement en droit de parler de la *relativité du hasard, de la complication et de l'indépendance*, à la condition, toutefois, d'y ajouter simultanément la *notion d'approximation*[2].

Des exemples remarquables et très simples sont donnés par les rapports mathématiques et leurs divers modes de représentation. Considérons, par exemple, le rapport π de

---

[1] On ne se rend pas assez compte, en général, de la difficulté que nous avons à prévoir les phénomènes d'apparence les plus simples. Un exemple typique est celui de la planète Neptune. Citons textuellement M. de la Baume Pluvinel : « Les éléments de l'orbite de Neptune sont encore mal connues, car on n'observe régulièrement cette planète que depuis 77 ans, et la durée de sa révolution est de 164 ans; elle n'a donc encore été observée que pendant une demi-révolution, *ce qui n'est pas suffisant* pour que l'on puisse prévoir, avec précision, les positions futures de la planète. »

[2] Ceci est conforme à la règle générale : on ne peut introduire la notion de relativité dans les sciences physiques qu'en négligeant une foule de phénomènes. Suivant l'heureuse expression de H. Poincaré *(Dernières Pensées)*, « l'Univers n'est tiré qu'à un seul exemplaire » ; puisqu'aucune de ses parties n'est identique à une autre, on ne peut parler de relativité qu'avec une certaine *approximation*.

la circonférence au diamètre. Ce rapport, dans le système décimal, peut être relié aux dix chiffres 0, 1, 2, ..., 9 de plusieurs façons différentes.

Ecrivons l'une d'elles :

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots\right). \qquad (1)$$

En l'examinant, nous disons tout de suite que la « loi est évidente ». Si je donne le $n^{\text{ème}}$ terme, je puis écrire immédiatement le $(n+1)^{\text{ème}}$.

Ecrivons-en une autre :

$$\pi = 3{,}14159265358979323846\ \ldots \qquad (2)$$

Cette expression m'apparaît infiniment compliquée. J'aurai beau écrire 10, 100, 1000, ... décimales, aucune loi ne sera mise en évidence : les chiffres semblent se succéder au hasard; ils paraissent absolument indépendants les uns des autres. Si je n'ai que cette expression à ma disposition, je serai dans l'impossibilité de prévoir, étant données les 10, 100, 1000, ... premières décimales, ce que doivent être les $11^{\text{ème}}$, $101^{\text{ème}}$, $1001^{\text{ème}}$, ...

Pourquoi les chiffres, ici, semblent-ils se succéder fortuitement ?

Un postulat intéressant dû à M. P. Ceresole[1] permet de répondre à la question. Nous l'énoncerons brièvement de la façon suivante :

Il est impossible de calculer la $n^{\text{ème}}$ décimale de π sans avoir auparavant calculé les $n - 1$ premières.

Ce postulat étant admis, il en résulte immédiatement que le nombre de symboles nécessaires à la détermination d'une décimale quelconque augmente indéfiniment avec le rang de celle-ci. On tend donc vers une complication infinie. En fait, le nombre de symboles augmente si rapidement que la complication est extrême dès le début.

Mais voici maintenant qui est essentiel : la complication est infinie, mais *non* parfaite; elle ne peut l'être puisque le

[1] P. CERESOLE, L'irréductibilité de l'intuition des probabilités et l'existence de propositions mathématiques indémontrables, *Arch. de Psych.*, t. XV, p. 255, 1915.

nombre d'opérations nécessaires pour passer d'une décimale à la suivante est *fini*. Toutefois, en choisissant des décimales aussi éloignées qu'on veut les unes des autres, on pourra dire, en vertu du postulat de M. Ceresole, que ces décimales sont indépendantes avec une *approximation* qui augmentera au delà de toute limite avec l'éloignement. La suite infiniment compliquée de π est « asymptotique » à une suite parfaite.

Nous avons ici un exemple simple de l'application de la notion de hasard avec une certaine *approximation*. Sous ce point de vue, la série des décimales de π devient « équivalente » à la série des chiffres que l'on obtiendrait en faisant une infinité de tirages dans une urne appropriée. Tout ce que l'on peut dire c'est que les opérations qui président à la formation de π sont beaucoup moins compliquées que les opérations qui président aux tirages successifs dans une urne. Il n'y a donc qu'une différence d'*approximation* et non une différence de *qualité*. C'est là quelque chose qui choquera bien des gens; on croira volontiers au dieu hasard dans le cas de l'urne et non dans le cas de π. Nous nous heurtons ici à un postulat épistémologique qui joue un très grand rôle dans la science moderne en contenant en puissance les théories dites de *relativité*. Nous essayerons de l'énoncer tant bien que mal de la façon suivante :

Considérons deux choses comparables A et B, dont l'une, A, semble *a priori* jouir d'une « situation privilégiée » par rapport à B. Si, par *aucun moyen*, nous ne pouvons mettre en évidence le « privilège », nous devons en conclure que A et B sont toutes deux parfaitement « équivalentes ».

On comprend maintenant aisément ce qu'il faut entendre par la relativité de nos relations. Selon qu'il est représenté par (1) ou par (2), le rapport π nous apparaît simple ou infiniment compliqué.

Plus généralement, on peut parler de la *relativité* de l'indépendance et de la complication en ce sens que, *selon le point de vue*, des événements nous semblent se succéder au hasard, ou bien comme susceptibles d'être prévus par des lois relativement simples.

16. — Dans toutes les applications, la notion d'*approximation* jouera un rôle important, et il y aura lieu d'envisager une indépendance ou une complication plus ou moins approchées. Comme toute théorie, le hasard ne sera réalisé qu'approximativement. Il sera toujours possible, d'une loi connue, suffisamment compliquée, de déduire des nombres qui concordent à peu près avec ceux du hasard parfait, admis lui-même comme n'étant qu'à peu près réalisé. Les différents états d'un phénomène sembleront d'autant plus indépendants les uns des autres qu'il sera plus difficile de trouver des relations simples entre ces états.

Cette idée d'approximation dans le hasard peut être utilement éclaircie par un parallèle entre le brassage et certains phénomènes physiques qui n'arrivent à leur terme qu'après un temps infini. Tel est, par exemple, l'arrêt d'une pièce mécanique dans un fluide visqueux. On introduit alors un *temps de relaxation*. C'est le temps nécessaire à la pièce pour que sa vitesse tombe à une certaine fraction de sa vitesse initiale. Semblablement, on peut introduire dans l'étude du brassage d'un jeu de cartes, un certain *nombre de relaxation*. C'est la valeur que doit avoir le nombre m pour que l'ordre final soit indépendant de l'ordre initial à une certaine approximation près. Pour une approximation donnée, m devra être d'autant plus grand que les p différeront plus les uns des autres.

17. — L'introduction du temps de relaxation, en général du *temps*, dans le hasard est très importante pour l'étude des phénomènes. M. Perrin, par exemple, a été tout naturellement conduit à repérer, à des intervalles réguliers, les positions d'un grain d'émulsion, et à constater ainsi que le grain se déplaçait, avec une très grande approximation, suivant les lois du hasard. Les pointés étaient faits, par exemple, toutes les quinze secondes. S'ils avaient pu être faits à des intervalles de temps inférieurs au $\frac{1}{100\,000}$ de seconde, on aurait mis en évidence la loi de mouvement, et l'on ne pourrait plus, même approximativement, parler de hasard.

Si, en général, on n'introduit pas explicitement le temps dans les probabilités, c'est que celles-ci s'appliquent surtout à des *jeux* de hasard où la succession des événements (parties) a lieu beaucoup moins rapidement que la succession des battements dans le battage d'un jeu de cartes. Examinons, par exemple, le jeu de pile ou face. Entre chaque partie il s'écoule un temps tel que le système joueur-pièce a complètement « oublié » les états précédents. La relaxation est quasi complète. Peut-être qu'en jouant suffisamment vite on ne parviendrait pas à éliminer un certain automatisme. Il semble même qu'on ne pourrait parvenir à ramasser et jeter très rapidement une pièce de monnaie qu'en faisant des mouvements bien coordonnés, comme il arrive dans le battage des cartes par un joueur.

18. — L'étude que nous venons de faire pourrait s'appliquer à tout autre système *opérateur-objet,* tels que : boules dans une urne, petits chevaux, roulette, etc. Dans tous, il y a un objet : jeu de cartes, ensemble de boules, machine, etc., qui doit présenter certains caractères de symétrie géométrique, et sur lequel s'exercent un ou plusieurs de nos mouvements répétés, qui, à cause de notre constitution en transformation continuelle, se présentent avec une suite indéfinie de différences. Nous sommes ainsi excellemment constitués pour « faire » du hasard : notre intelligence, d'une part, nous permet de répéter un nombre énorme de fois des mouvements très semblables ; d'autre part, des différences involontaires dans ces mouvements produisent les petites irrégularités nécessaires. Nous sommes, de la sorte, en mesure de créer un hasard qui s'approche indéfiniment du hasard parfait. De temps à autre, les appareils doivent être vérifiés, remplacés à la longue, afin qu'il n'y ait jamais de disymétrie fâcheuse, ce qui serait immanquable avec l' « usure », c'est-à-dire la *transformation* inévitable de l'appareil employé.

Il y a là des circonstances qu'il ne faut pas perdre de vue lorsqu'on veut appliquer les lois du hasard à un système purement physique qui, comme nos machines, finit toujours par se transformer, de sorte qu'à la fin de l'expérience le système ne correspond plus à la définition initiale que nous avions adoptée pour faire les considérations de probabilité.

Aussi est-il vain de croire que le principe de l'augmentation de l'Entropie est complètement épuisé lorsqu'on y a introduit les lois du hasard.

III. — Premier mode d'emploi du hasard pour l'étude des phénomènes : Emploi du hasard objectif.

19. — Au paragraphe précédent, nous avons défini le brassage parfait et la probabilité objective parfaite.

Il convient de voir maintenant comment on peut utiliser ces notions pour l'étude des phénomènes, l'expression « phénomènes » étant prise dans son acception la plus large.

20. — Envisageons un phénomène dont les états aux temps t_0, $t_0 + \tau$, $t_0 + 2\tau$, ..., dépendent des valeurs que prennent, à chacun de ces instants, n paramètres, et supposons que ces n paramètres ne peuvent satisfaire qu'à des relations très compliquées, — soit que ceci résulte de l'observation directe, soit que ceci résulte de considérations purement théoriques.

Dans ce cas, il sera possible, avec une certaine approximation, *d'établir une correspondance entre un brassage parfait et le phénomène étudié.*

A cet effet, on formera un phénomène fictif que nous appellerons « schéma de brassage parfait » ; *il sera caractérisé par* n *paramètres correspondant aux* n *paramètres ci-dessus, et effectué par des démons aux temps* t_0, $t_0 + \tau$, $t_0 + 2\tau$, ..., *dans des conditions choisies de manière que les valeurs successives prises à ces instants par l'un quelconque des paramètres du phénomène, forment, approximativement, une série possible de valeurs pour le paramètre correspondant du schéma. Dans ce cas, les propriétés d'ensemble de ce phénomène fictif correspondront d'une manière approximative aux propriétés d'ensemble du phénomène donné, et permettront de les calculer.*

C'est ce calcul qui seul importe. La difficulté du problème consistera dans le choix convenable des conditions que le schéma devra remplir dans ce but.

21. — Ainsi, tandis que le mode habituel de représentation des phénomènes par les équations différentielles donne la