

Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 17 (1915)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: SUR LE PROBLÈME DE L'ÉCLAIREUR
Autor: Turrière, Emile
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-16321>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 06.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

SUR LE PROBLÈME DE L'ÉCLAIREUR

PAR

EMILE TURRIÈRE (Montpellier).

Je me propose de résoudre rapidement le problème de l'éclaireur, qui a fait l'objet de la Question du n° 746 de l'*Intermédiaire des Mathématiciens* (Buray, 1896, pp. 35 et 93); le pseudonyme de *Buray* semble n'être autre qu'un anagramme du nom d'un géomètre bien connu des lecteurs de l'*Enseignement mathématique*.

1. Le problème de l'éclaireur consiste dans la détermination et l'étude de la trajectoire idéale que doit suivre un éclaireur, en mouvement uniforme, chargé de surveiller un ennemi en mouvement rectiligne et uniforme. D'une manière précise, ce problème peut être énoncé sous la forme suivante : Un plan est rapporté à deux axes rectangulaires (Ox, Oy). L'origine O représente un buisson, une maison... ou tout autre obstacle qui permette à l'éclaireur de dissimuler sa présence. L'ennemi E est supposé décrire uniformément une droite d'équation $y_1 = -a$; soit x_1 son abscisse. L'éclaireur, représenté par un point M du plan, de coordonnées (xy) , est assujéti à rester sur la droite EO prolongée au delà de O ; le point M doit se rapprocher constamment du point O en parcourant une trajectoire inconnue d'un mouvement uniforme. Le rapport des vitesses de l'éclaireur et de l'ennemi sera désigné par V .

Les équations qui traduisent les conditions de l'énoncé sont :

$$ax + x_1y = 0, \quad dx^2 + dy^2 = V^2 dx_1^2;$$

l'élimination de x_1 entre elles donne l'équation différentielle de la trajectoire inconnue de l'éclaireur :

$$y^4(dx^2 + dy^2) = a^2 V^2 (xdy - ydx)^2 .$$

La *courbe de l'éclaireur* est ainsi une courbe transcendante et panalgébrique. De sa définition précédente même, il résulte que cette courbe est rectifiable ; l'arc parcouru par l'éclaireur est mesuré par l'expression $aV(\cotg \Theta_0 - \cotg \Theta)$, Θ_0 et Θ étant les azimuts initial et courant de l'éclaireur.

2. Considérons maintenant la courbe de l'éclaireur, sous le point de vue tangentiel, comme étant enveloppée par la droite d'équation

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi = \varpi ;$$

l'équation différentielle précédemment formée équivaut à la relation

$$y^2 = K\varpi ,$$

dans laquelle la constante k est introduite pour désigner l'expression aV . La *courbe de l'éclaireur* est donc caractérisée par la propriété suivante : la distance du pôle O à la tangente courante est proportionnelle au carré de l'ordonnée du point courant.

Cette propriété contient le principe d'une construction bien simple de la tangente à la courbe de l'éclaireur en un point donné et, inversement, celui de la construction du point de contact d'une tangente imposée. Elle conduit aussi à l'équation de la courbe de l'éclaireur, dans le système de coordonnées tangentielles auxquelles M. M. d'OCAGNE a donné le nom de *coordonnées axiales*. De l'expression générale de l'ordonnée du point courant d'une courbe en fonction de l'angle φ ,

$$y = \varpi \sin \varphi + \frac{d\varpi}{d\varphi} \cos \varphi = \cos^2 \varphi \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\varpi}{\cos \varphi} \right) ,$$

il résulte que l'équation différentielle de la courbe de l'éclaireur peut être transformée en l'équation différentielle :

$$\cos^2 \varphi \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\varpi}{\cos \varphi} \right) = \sqrt{K\varpi} ;$$

introduisant alors les coordonnées axiales φ et $\lambda = \frac{\varpi}{\cos \varphi}$, cette équation devient

$$\frac{d\lambda}{d\varphi} = \sqrt{K\lambda} \cos^{-\frac{3}{2}} \varphi ;$$

l'équation définitive est ainsi

$$2\sqrt{\frac{\lambda}{K}} = \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi \sqrt{\cos \varphi}} + \text{const} ;$$

la courbe de l'éclaireur est, par conséquent, une courbe transcendante, panalgébrique, dépendant des fonctions elliptiques.

De l'équation caractéristique $y^2 = K\varpi$ de la courbe de l'éclaireur, résulte par dérivation la relation

$$2y \frac{dy}{d\varphi} = K \frac{d\varpi}{d\varphi} ,$$

qui équivaut encore à la suivante :

$$\frac{2R}{K} = \frac{\frac{d\varpi}{d\varphi}}{y \cos \varphi} ;$$

cette proportion, entre le rayon de courbure R en un point courant de la courbe de l'éclaireur, le segment constant $\frac{K}{2}$,

la distance $\frac{d\varpi}{d\varphi}$ du pôle O à la normale courante et la projection de l'ordonnée courante sur la tangente courante, permet de construire le cercle osculateur en tout point de la courbe de l'éclaireur.

3. La courbe de l'éclaireur se rattache aussi à une courbe gauche remarquable. Adjoignons, en effet, aux deux axes Ox , Oy un troisième axe Oz , qui sera supposé vertical. Les équations de la courbe de l'éclaireur prouvent qu'elle est la projection horizontale de la courbe gauche définie par les équations :

$$ax + yz = 0 , \quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = (V^2 + 1) dz^2 .$$

La trajectoire de l'éclaireur est donc la projection horizontale d'une hélice tracée sur un parabolôïde hyperbolique à plan directeur horizontal.

Posons enfin :

$$x_1 = z = aZ, \quad x = ia\sqrt{X}, \quad y = ia\sqrt{Y};$$

les équations de l'hélice deviennent

$$X + YZ = 0 \quad dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0.$$

Les hélices considérées sont donc affines, par voie complexe, aux lignes de longueur nulle d'un parabolôïde hyperbolique. Cette dernière propriété présente une grande importance, car elle donne naissance à une nouvelle méthode de détermination des équations de la courbe de l'éclaireur : il suffit de rapporter le parabolôïde à ses lignes de courbure pour réduire aux fonctions elliptiques la détermination de ses lignes de longueur nulle.

23 mai 1915.

SUR LA DÉTERMINATION DES TRAJECTOIRES ORTHOGONALES D'UNE FAMILLE DE CERCLES

PAR

L. BALLIF (Angoulême).

1. — Considérons d'abord une famille de cercles situés dans un même plan. Soient x, y les coordonnées du centre C d'un cercle, θ l'angle du rayon CM avec ox , et X, Y les coordonnées d'un point M du cercle. Ecrivons que MC est tangent au lieu de M

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{dY}{dX}$$

et comme

$$X = x + R \cos \theta, \quad Y = y + R \sin \theta,$$