Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique
Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique
Band: 17 (1915)
Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Artikel: LA TRIGONOMÉTRIE DANS SES RAPPORTS AVEC LA GÉOMÉTRIE
Autor: Streit, Arnold
Kapitel: II. — Formules de $\sin (\alpha \pm \beta)$ et $\cos (\alpha \pm \beta)$.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-16317

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Les segments, déterminés par les hauteurs, qu'il faut suivre pour aller de A vers B, puis de B vers C, et enfin de C vers A seront appelés $c'\,c''$ (sur c), $a'\,a''$ (sur a), $b'\,b''$ (sur b).

II. — Formules de $\sin(\alpha \pm \beta)$ et $\cos(\alpha \pm \beta)$.

Démonstrations basées sur un théorème de géométrie et son corollaire.

A. — *Formule du sinus de la somme de deux arcs. — La somme de deux angles d'un triangle quelconque et le 3e angle étant supplémentaires,* leurs sinus sont égaux :

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\gamma \,. \tag{1}$$

Il est donc tout naturel de partir de cette relation pour chercher à établir une nouvelle démonstration de la formule du sinus de la somme de deux arcs. D'après la fig. 1 :

$$\sin\gamma = \frac{h'}{b} \,.$$

La relation (1) devient :

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{h'}{b} \,.$$

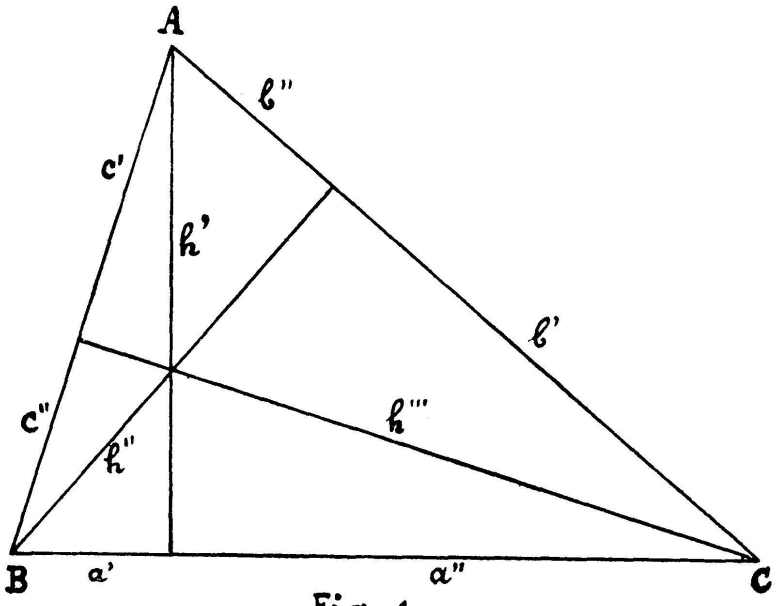

Fig 1.

On a successivement

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{h' \,.\, c}{b \,.\, c} = \frac{h'(c' + c'')}{b \,.\, c} = \frac{h'}{c} \,.\, \frac{c' + c''}{b} \,.$$

Mais

$$\frac{h'}{c} = \frac{h'''}{a} .$$

Par suite

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{h'''}{a} \cdot \frac{c' + c''}{b} = \frac{h''' c''}{ab} + \frac{h''' c'}{ab} ,$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{h'''}{b} \cdot \frac{c''}{a} + \frac{c'}{b} \cdot \frac{h'''}{a} ,$$

ou

(I) $$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta .$$

B. — *Formule du cosinus de la somme de deux arcs.* — α, β et γ étant les angles d'un triangle, nous avons :

$$\cos(\alpha + \beta) = -\cos\gamma .$$

La figure 1 donne

$$\cos\gamma = \frac{a''}{b} ,$$

d'où, en remplaçant :

$$\cos(\alpha + \beta) = -\frac{a''}{b} = -\frac{aa''}{ab} .$$

Nous établirons plus loin la relation suivante :

$$h'''^2 = c'c'' + aa'' ,$$

d'où

$$aa'' = h'''^2 - c'c'' .$$

Substituons ci-dessus :

$$\cos(\alpha + \beta) = \frac{c'c'' - h'''^2}{ab} = \frac{c'}{b} \cdot \frac{c''}{a} - \frac{h'''}{b} \cdot \frac{h'''}{a} ,$$

ou

(II) $$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta .$$

C. — *Formule du sinus de la différence de deux arcs.* — Au lieu de déduire cette formule de la relation (1) en y remplaçant β par $-\beta$, on peut aussi l'obtenir directement de la figure 1 par un procédé peu différent de celui déjà employé.

Supposons que α soit un angle aigu du triangle et désignons par α' l'angle extérieur correspondant à α. *Il vaut la somme des angles intérieurs non adjacents :*

$$\alpha' = \beta + \gamma$$

d'où

$$\gamma = \alpha' - \beta , \qquad \sin\gamma = \sin(\alpha' - \beta) .$$

Mais

$$\sin\gamma = \frac{h'}{b} .$$

Par suite

$$\sin(\alpha' - \beta) = \frac{h'}{b} = \frac{h'(c' + c'')}{b \cdot c} = \frac{h'}{c} \cdot \frac{c' + c''}{b} .$$

$$\sin(\alpha' - \beta) = \frac{h'''}{a} \cdot \frac{c' + c''}{b} = \frac{h'''}{b} \cdot \frac{c''}{a} + \frac{c'}{b} \cdot \frac{h'''}{a} ,$$

$$= \frac{h'''}{b} \cdot \frac{c''}{a} - \left[-\frac{c'}{b}\right] \cdot \frac{h'''}{a} .$$

Or

$$\cos\alpha' = -\frac{c'}{b}$$

puisque α' est obtus ; donc

(III) $$\sin(\alpha' - \beta) = \sin\alpha' . \cos\beta - \cos\alpha' . \sin\beta .$$

D. — *Formule du cosinus de la différence de deux arcs.* — Au lieu de tirer cette formule de la relation (II) en y remplaçant β par $-\beta$, on peut aussi l'établir en se basant sur la figure 1.

Choisissons un angle aigu α du triangle et soit α' l'angle extérieur correspondant. Nous pouvons écrire successivement :

$$\alpha' = \beta + \gamma , \qquad \gamma = \alpha' - \beta ;$$

$$\cos\gamma = \cos(\alpha' - \beta) , \qquad \cos(\alpha' - \beta) = \frac{a''}{b} = \frac{aa''}{ab} ,$$

$$h'''^2 = c'c'' + aa'' ,$$

$$\cos(\alpha' - \beta) = \frac{h'''^2 - c'c''}{ab} = \frac{h'''}{b} \cdot \frac{h'''}{a} - \frac{c'}{b} \cdot \frac{c''}{a} ;$$

α' est obtus :

$$\sin\alpha' = \frac{h'''}{b} ; \qquad \sin\beta = \frac{h'''}{a} ;$$

$$\cos\alpha' = -\frac{c'}{b} ; \qquad \cos\beta = \frac{c''}{a} ;$$

(IV) $$\cos(\alpha' - \beta) = \cos\alpha' . \cos\beta + \sin\alpha' . \sin\beta .$$

III. — Conséquences géométriques résultant de l'application des formules de trigonométrie au triangle quelconque.

En appliquant les formules précédentes et celles qui en découlent au triangle quelconque, on retrouve les relations de certains théorèmes importants de géométrie et l'on arrive à établir des théorèmes nouveaux.