

## II. — Vecteur-quaternion.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1915)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

### **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## II. — Vecteur-quaternion.

*Définitions.* — Considérant deux vecteurs géométriques ayant même origine  $O$  :

$$\overline{OA} = \bar{v}_1 \cdot a \quad \text{et} \quad \overline{OB} = \bar{v}_2 \cdot b ,$$

portés par les axes  $v_1$  et  $v_2$  dont le plan est orienté grâce à un axe  $u$  perpendiculaire à ce plan en  $O$ , on appelle *quaternion* toute loi de formation de l'un de ces vecteurs à l'aide de l'autre.

Par exemple, pour former  $\overline{OB}$  à l'aide de  $\overline{OA}$ , il suffit de multiplier d'abord  $\overline{OA}$  par le nombre qualifié

$$h = \frac{b}{a} ,$$

puis de faire tourner le vecteur ainsi obtenu, autour de l'axe  $u$  d'un angle

$$\widehat{v_1 v_2} = \theta + 2k\pi ,$$

de manière à l'amener en coïncidence avec  $OB$ . Le nombre chargé de cette rotation s'appelle le *verseur* du quaternion ; si l'on désigne par  $u$  le verseur qui opère autour de l'axe  $u$  une rotation d'un droit dans le sens direct, je démontre que le verseur du quaternion précédent peut être noté

$$e^{u\theta} \quad \text{ou} \quad e^{u(\theta + 2k\pi)} .$$

Le quaternion considéré, qui s'appelle *rapport* de  $\overline{OB}$  à  $\overline{OA}$ , est égal au produit du nombre qualifié  $h$  par le verseur  $e^{u\theta}$ , et l'on a

$$q = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\bar{v}_2}{\bar{v}_1} = h \cdot e^{u\theta} .$$

Ayant défini les sommes et produits de quaternions, on démontre que l'on a

$$q = h \cos \theta + u \cdot h \sin \theta .$$

Le terme  $u \cdot h \sin \theta$  qui peut aussi s'écrire

$$h \sin \theta \cdot e^{u \frac{\pi}{2}}$$

est un quaternion dont l'angle est droit. On l'appelle un *quaternion-droit* ou un *vecteur-quaternion*, ce qui fait dire qu'un quaternion est égal à la somme d'un nombre qualifié — que Hamilton appelle *scalar* — et d'un *vecteur*. Une erreur courante est de croire que ce vecteur est un vecteur géométrique. En réalité c'est un nombre, un quaternion-droit. Mais l'expression *vecteur-quaternion* se justifie si l'on remarque que les quaternions-droits se comportent dans les calculs comme les vecteurs géométriques obtenus en substituant au verseur  $u$  le vecteur-unité  $\bar{u}$ .

J'ai appelé le vecteur-géométrique

$$\bar{u} \cdot l$$

le *vecteur homologue* du vecteur-quaternion

$$u \cdot l .$$

Si l'on considère trois axes trirectangulaires  $i, j, k$ , d'origine  $O$  et orientés suivant la règle du pouce, on aura

$$\bar{u}l = \bar{i} \cdot l \cos \widehat{i\bar{u}} + \bar{j} \cdot l \cos \widehat{j\bar{u}} + \bar{k} \cdot l \cos \widehat{k\bar{u}}$$

et en même temps

$$ul = i \cdot l \cos \widehat{i\bar{u}} + j \cdot l \cos \widehat{j\bar{u}} + k \cdot l \cos \widehat{k\bar{u}} ,$$

les symboles  $u, i, j, k$ , désignant les verseurs-droits autour des axes correspondants.

On peut d'ailleurs observer que l'on a

$$k = j \cdot i ,$$

d'où, en posant

$$\begin{aligned} h \cos \theta &= x_1 & h \sin \theta \cos \widehat{j\bar{u}} &= x_2 \\ h \sin \theta \cos \widehat{i\bar{u}} &= y_1 & h \sin \theta \cos \widehat{k\bar{u}} &= y_2 \end{aligned}$$

on obtient

$$q = x_1 + iy_1 + jx_2 + jy_2$$

ou

$$q = x_1 + iy_1 + j(x_2 + iy_2)$$

ou enfin

$$q = z_1 + jz_2$$

$z_1$  et  $z_2$  étant deux nombres complexes binaires.

*En résumé* : Un vecteur-quaternion est un quaternion dont l'angle est droit. C'est un vecteur axial et glissant.

Toute l'analyse vectorielle repose sur la confusion entre les vecteurs géométriques et les vecteurs-quaternions homologues ; confusion dont j'ai démontré la légitimité dans mon *Arithmétique générale*.

### III. — Vecteurs-glisseurs.

Les notations  $\overline{AB}$  et  $AB$  sont les notations classiques d'un vecteur géométrique d'origine A et d'extrémité B. Hamilton et Grassmann ont employé les notations  $A - B$  et  $B - A$ . Cette dernière, où l'on a voulu voir une abréviation de  $OB - OA$ , semble actuellement réunir les préférences des mathématiciens. On reproche à  $AB$  sa forme qui rappelle celle des produits. Il me paraît que ce reproche est puéril. Lorsque j'écris une formule et que je la transforme par le calcul, je n'agis pas comme une mécanique inconsciente : il ne m'arrivera jamais de prendre  $AB$ , qui au début aurait représenté un vecteur ou sa mesure, pour un produit de A par B. Il faut évidemment savoir de quoi l'on parle, et par exemple n'user de la propriété commutative des produits que lorsqu'il ne s'agit pas de facteurs quaternions.

Quoi qu'il en soit, le fait d'avoir vu représenter un vecteur  $\overline{AB}$  par la notation  $B - A$  m'a amené à considérer un vecteur comme un transporteur de points. Cette conception donne naissance à une nouvelle espèce de vecteurs, opérateurs ou nombres, tout à fait distincts des vecteurs-géométriques et