BIBLIOGRAPHIE

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1915)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **14.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

BIBLIOGRAPHIE

Emile Borel. — **Leçons sur la Théorie des fonctions.** Eléments et principes de la théorie des ensembles avec applications à la théorie des fonctions. 2e édition, 1 vol. gr. in-8o de XII-260 p.; 7 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris.

La seconde édition de cet ouvrage ne diffère matériellement de la première que par l'adjonction de Notes constituées elles-mêmes par des publications dues, en très grande partie, à l'auteur et effectuées dans différents recueils périodiques. Il serait donc possible, à la rigueur, d'analyser ce nouveau volume en renvoyant simplement à d'autres analyses déjà faites, mais ce serait singulièrement méconnaître la pensée de M. Borel.

Depuis dix-sept ans que l'œuvre a inauguré la *Collection de Monographies sur la Théorie des fonctions*, la théorie des ensembles a acquis un tel développement qu'il aurait fallu, pour la remanier, la fondre avec une foule d'autres œuvres; mieux valait la simplicité primitive avec des adjonctions indiquant les principales voies parcourues par la pensée mathématique de par l'acquisition de la notion d'ensemble. Je puis donc écrire une analyse qui n'apprendra rien aux géomètres de ma propre génération, mais qui pourra réattirer fort utilement l'attention des jeunes sur un sujet qu'il y a tout intérêt à reprendre au début, sous une forme primitive simple et claire.

Deux *ensembles* se sont imposés de tout temps non seulement aux géomètres, mais aux hommes en général; celui des *nombres entiers* et le *continu*. Les éléments des ensembles *dénombrables* peuvent toujours être numérotés au moyen de la suite des entiers; ils sont dits *de première puissance;* le continu est *de seconde puissance*. Tout d'abord on peut, sans aller plus loin, revenir sur ces notions qui semblent intuitives et voir qu'elles sont loin d'être aussi claires, au point de vue purement logique, qu'on est d'abord porté à le croire. Ainsi l'ensemble des points intérieurs à un carré a même puissance que l'ensemble des points qu'on peut considérer sur un côté. On peut aussi détruire le continu en lui enlevant un certain ensemble d'intervalles et en conservant cependant un ensemble qui, s'il n'est plus le continu ordinaire, en a du moins la puissance (p. 44). C'est même une telle conception, paradoxale au premier abord, qui pourrait à elle seule forcer à l'introduction de la notion de *mesure* d'un ensemble. Au point de vue géométrique élémentaire, le continu seul semble susceptible de mesure, et, rien qu'à ce point de vue, la notion est capitale; sa généralisation pour autre chose que le continu a été la source des plus puissants et des plus captivants progrès faits par la théorie des fonctions et la théorie de l'intégration.

En dehors de ces aperçus, de forme un peu paradoxale, signalons qu'une des démarcations les plus indispensables à approfondir entre le dénom-

brable et le continu se rencontre dans la distinction des nombres *rationnels* et *irrationnels*. Que de profonds sujets d'étonnement il y a dans la seule comparaison des deux choses ; sans les nombres irrationnels, pas de continu, et ces nombres irrationnels sont effroyablement difficiles à définir, à reconnaître, à grouper. On peut artificiellement, comme le faisait Liouville, construire des nombres que l'on saura être en dehors du dénombrable, mais ils ne correspondront guère à des problèmes réels non créés exprès pour obtenir la génération en question. On pourra alors prendre e, π, la constante d'Euler, voir si l'on peut ou non les ranger parmi les nombres *algébriques*. Or la question n'est résolue que pour e et π. Non vraiment, l'intime constitution du continu n'est pas chose logiquement simple.

Parmi les applications préliminaires les plus importantes, signalons la théorie du prolongement analytique. Une fonction analytique peut être définie par un ensemble dénombrable de séries entières. Le problème du prolongement consiste à savoir enchaîner ces éléments les uns aux autres ; on peut le résoudre d'une infinité de manières. Mais le problème ainsi résolu appelle encore de nombreux perfectionnements ; pratiquement, une infinité, même dénombrable, de séries entières ne saurait être considérée. Alors se pose la question de trouver d'autres développements valables dans des régions de plus en plus étendues ; c'est là que naissent les développements en séries de fractions rationnelles, en séries de polynômes, en séries sommables, etc. C'est peut-être sur ce point qu'il faut plus spécialement inviter le néophyte à se reporter rapidement aux autres volumes de la *Collection*.

Tout ceci termine le corps principal du volume ; il faut d'abord y adjoindre trois notes, déjà publiées dans la première édition, sur *La notion de puissance*, *La croissance des fonctions* et *La notion de fonction en général*. Tout d'abord il faut approfondir la notion générale de puissance et montrer qu'au delà du continu il y a des ensembles de toutes les puissances possibles ; on y arrive en montrant qu'au delà d'un ensemble donné il y a toujours un ensemble de puissance supérieure d'une unité au moins. Soit $f(x)$ une fonction ne prenant jamais, quel que soit x, que les valeurs 0 ou 1 mais bien déterminée quand on donne x. Elle permet de faire correspondre à l'ensemble dénombrable type 1, 2, 3, ... un nombre tel que

$$0,1011010001101\ldots$$

qui, dans le système binaire, peut être un nombre rationnel ou irrationnel quelconque ; l'ensemble de tels nombres a la puissance du continu. Si maintenant x est dans le continu, une seule des fonctions $f(x)$ sera élément d'un ensemble de puissance supérieure à celle du continu. Pour que cette affirmation soit remplacée par une véritable démonstration, je ne puis évidemment que renvoyer à l'ouvrage de M. Borel, mais elle a un caractère manifestement intuitif, qui montre bien que la théorie des ensembles a aussi ses procédés d'intuition grandement propres à faciliter la découverte.

Pouvons-nous maintenant nous représenter ces ensembles ayant une puissance plus élevée que celle du continu, pouvons-nous en avoir une représentation tangible comparable à celle qui concerne les êtres géométriques ? La question est épineuse : elle a donné lieu et donne encore lieu à bien des discussions.

De même la théorie de la croissance des fonctions nous montre qu'après

avoir rangé des fonctions croissant de plus en plus vite suivant un ensemble dénombrable, on peut, en cherchant à continuer le rangement, sortir de cet ensemble. L'infini ordinaire correspondant à la suite des nombres entiers ne suffit pas ici ; il faut faire intervenir un *infini nouveau* ou *transfini*.

De là des polémiques entre MM. Hadamard, Borel, Lebesgue, Baire, fort suggestives à coup sûr, mais où chacun a peut-être conservé une partie de ses positions.

Signalons aussi que le public extramathématique a été mis au courant de telles questions par des articles élémentaires mais extrêmement soignés, publiés par la *Revue philosophique*, la *Revue du Mois*, la *Revue de Métaphysique et de Morale*. Ces articles, que M. Borel nous redonne ici, pourront être d'une étude extrêmement précieuse pour le débutant. Il pourra y acquérir facilement des idées générales qu'il transformera ensuite en idées vraiment mathématiques en revenant à la première partie du volume. Ce sont ces *Polémiques sur le transfini* qui constituent une quatrième Note, laquelle est la première pour la nouvelle édition. La suivante est consacrée aux *Probabilités dénombrables ;* ces probabilités se placent entre les problèmes d'analyse combinatoire où tous les éléments sont en nombre fini et les probabilités dites géométriques où les éléments forment des ensembles continus.

La dernière Note s'intitule *La théorie de la mesure et la théorie de l'intégration.* M. Borel cherche à revenir, par ses propres méthodes, aux si importants résultats dus à M. Lebesgue. Je n'ai ici que quelques lignes pour montrer comment la mesure et l'intégration sont intimement liées et je ne puis le faire, à coup sûr, que d'une façon bien grossière. Considérons cependant l'archaïque définition de l'intégrale qui correspond à une aire limitée par une courbe continue ordinaire $y = f(x)$, par l'axe Ox et par deux ordonnées d'abscisses a et b. L'intervalle ou segment (a, b) de l'axe Ox a pour mesure la somme des dx le composant. L'intégrale considérée est de même une somme de ces dx après que chacun a été multiplié par $f(x)$. Or remplaçons le banal segment (a, b) par un ensemble différent du continu, mais ayant cependant, comme lui, une mesure ; on doit évidemment pressentir qu'il y a une généralisation de l'intégrale à découvrir dans un tel ordre d'idées. Ce n'est peut-être ni très clair, ni très précis, mais, en ce point comme en beaucoup d'autres, je devrais réussir au moins à éveiller une intense curiosité envers un ouvrage qui a largement fait ses preuves et qui se trouve maintenant augmenté d'une manière particulièrement heureuse.

A. Buhl (Toulouse).

Louis de Contenson. — **La certitude mathématique.** *Les fondements mathématiques dans l'hypothèse de la philosophie critique.* (Système cartésio-kantien). — 1 vol. gr. in-8° de 93 p. ; 3 fr. 25 ; Gauthier-Villars, Paris.

Ce travail reproduit une grande partie d'un article du même auteur, intitulé : *L'Innéisme kantien des fondements mathématiques* et publié dans la *Revue de Philosophie* au début de 1914.

C'est une critique de bien des conceptions kantiennes et j'avoue qu'à la lecture des premières pages je me suis demandé avec inquiétude si M. de Contenson n'allait pas se briser les dents sur une lime particulièrement dure. Eh bien, non ! Il y a là un travail des plus consciencieux et des plus profonds qui oppose les mathématiciens philosophes comme Descartes et

Henri Poincaré aux philosophes qui ont parlé des mathématiques avec une compréhension non toujours suffisante, ce qui serait le cas de Kant.

La philosophie latine n'a jamais eu un goût excessif pour juger les idées innées ; elle les admet et invente. C'est ainsi que Descartes marche, dans la voie de la géométrie analytique, vers les développements ultérieurs du calcul infinitésimal. L'école kantienne, au contraire, discute à perte de vue sur les fondements.

Pour Kant la subjectivité domine partout, notamment quant à sa conception de l'espace, ce qui ne semble plus admissible, du moins sans nouvelles précisions.

L'espace a le même degré de réalité que les objets matériels ; c'est indiscutable après Henri Poincaré qui, de bien des manières, nous a montré que les propriétés de notre espace étaient celles des corps solides. Ceci n'empêche pas qu'on peut se demander si l'espace et les solides ont *ensemble* une existence réelle, mais c'est le mot souligné qui a ici l'importance capitale.

Mêmes conclusions pour l'idée de temps qu'on peut réduire à celle de changements se produisant dans des objets observés. La critique peut devenir plus redoutable encore si l'on examine quelques arguments géométriques particuliers qui semblaient avoir grande valeur aux yeux de Kant et qui ont cependant tout perdu à la lumière de conceptions plus récentes. Les tétraèdres symétriques par rapport à un plan, images l'un de l'autre dans un miroir plan, peuvent être considérés, de ce fait, comme des assemblages d'éléments aussi identiques que des points seraient identiques à leur image. Cependant ces tétraèdres, pris en bloc, ne sont pas superposables, ce qui prouverait que nous avons introduit quelque différence entre des objets qui devraient pouvoir se confondre et l'espace qui ne permet pas de réaliser cette confusion. Il est à peine besoin de rappeler que la solution de ce prétendu paradoxe est immédiate dans l'hyperespace et que la question est simplement ramenée à celle de savoir pourquoi nous attribuons trois dimensions à l'espace ordinaire plutôt qu'un autre nombre de dimensions.

Quant à la vraie nature des fondements mathématiques, M. de Contenson me semble se révéler comme un disciple original et pénétrant du Maître que fut Henri Poincaré : les fondements sont des hypothèses. Il insiste beaucoup sur les prodigieuses transformations que l'enseignement lui-même semble avoir subi de ce fait. La géométrie non euclidienne semble d'abord avoir été considérée comme une simple curiosité ; maintenant il est question d'action non euclidienne jusqu'en Mécanique, comme M. Appell n'a pas craint de le révéler en introduisant les travaux de MM. Cosserat dans une importante Note insérée en son Traité de Mécanique rationnelle.

La variabilité des principes et hypothèses fondamentales des mathématiques est peut-être la plus importante conquête qui ait jamais été faite par la philosophie.

A. Buhl (Toulouse).

Luigi Cremona. — **Opere Matematiche.** Pubblicate sotto gli auspici della R. Accademia dei Lincei. *Tomo primo* con ritratto dell'autore. — 1 vol. in-4°, 498 p. ; 25 lires ; Ulrico Hœpli, Milano, 1914.

La collection des œuvres complètes des grands mathématiciens italiens publiée par la maison Hœpli, à Milan, va être augmentée d'une nouvelle série de trois volumes. Après les travaux de Beltrami, Betti, Brioschi,

viennent ceux du grand géomètre Luigi Cremona (1830-1903). Ils sont publiés sous les auspices de l'Académie Royale des Lincei par les soins d'un comité composé de MM. Bertini, Castelnuovo, Dini, D'Ovido, Sègre, Veronese. La publication est dirigée par M. Bertini. Elle comprendra tous les travaux mathématiques du grand géomètre, y compris les exercices et les comptes rendus bibliographiques, à l'exception de deux ouvrages didactiques, le *Calcolo grafico* et la *Geometria projettiva*.

Les mémoires sont publiés dans l'ordre chronologiques ; on trouvera donc dans ce premier volume les travaux de jeunesse de 1855 à 1862, publiés dans les *Annali di scienze matematiche e fisiche*, les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, les *Annali di Matematica pura ed applicata*, *Il Politecnico*, les *Atti del Reale Istituto Lombardo*, etc.

Ce sont des recherches sur la Géométrie supérieure se rattachant à la théorie des courbes gauches et des surfaces. Nous signalons notamment l'introduction au cours de Géométrie supérieure à l'Université de Bologne en 1860 et le beau mémoire intitulé « Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane ». Mentionnons aussi les articles sur les cubiques gauches, les coniques sphériques, les quadriques homofocales, les courbes gauches décrites sur la surface d'un hyperboloïde à une nappe, etc.

Parmi les articles bibliographiques on lira avec intérêt les comptes rendus des ouvrages de von Staudt « Beiträge zur Geometrie der Lage », et de Hesse « Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes ». H. F.

P. Duhem : **La Science allemande.** — 1 vol. in-16, 145 p. : A. Hermann & fils, Paris, 1915.

On sait la place que M. Duhem occupe à l'heure actuelle non seulement comme physicien, mais comme historien des sciences. Tous ses amis et admirateurs attendent avec impatience l'achèvement de son grand ouvrage sur « le Système du monde».

C'est dire l'intérêt tout spécial qui s'attache à la récente publication de M. Duhem intitulée : « La Science allemande» . Les sentiments patriotiques qui animent cet ouvrage en rendent la lecture plus émouvante encore.

En quelques pages d'une remarquable netteté M. Duhem étudie les défauts et les qualités de la pensée allemande dans le domaine des sciences mathématiques, expérimentales et historiques. Ce qui caractérise le génie allemand, c'est *l'esprit algébrique*, c'est-à-dire l'aptitude à déduire avec une implacable rigueur.

Par exemple, une fois certains principes mathématiques établis, la déduction se poursuit infaillible ; tant pis si les conséquences obtenues de cette manière légitiment à des conceptions comme les géométries non-euclidiennes et le principe de relativité qui contredisent aux données les mieux établies du sens commun.

De même en ce qui concerne les sciences expérimentales telles que la Chimie. Leur création exigeait l'*esprit de finesse*, c'est-à-dire un contrôle délicat et incessant des faits donnés dans l'expérience et c'est pourquoi ces sciences n'ont pu prendre naissance en Allemagne ; mais sitôt qu'elles purent revêtir une forme mathématique, elles ont pris dans ce pays un essor remarquable.

Lorsqu'il s'agit de recherches historiques nous constatons dans la pensée allemande les mêmes qualités et les mêmes défauts. L'historien allemand

cherche à plier les faits au cadre idéal qu'il s'est tracé, au lieu de se laisser guider par eux dans la recherche de la vérité.

La thèse soutenue par M. Duhem soulève des problèmes délicats. Sur un point toutefois elle nous paraît indiscutable. En ce qui concerne l'histoire des sciences durant ces dernières années, certains auteurs allemands ont mis surtout en lumière la part qui revenait à leurs compatriotes dans les découvertes scientifiques ; la tentation était grande dès lors de considérer celles-ci comme une propriété nationale. Il n'est que juste de réagir contre cette prétention et de rétablir les faits dans leur intégrité.

Mais, nous nous hâtons de l'ajouter, le livre de M. Duhem n'est pas un livre de polémique à courte vue. Il affirme l'existence de la science comme étant une œuvre collective, à la création de laquelle chaque peuple contribue suivant son génie propre. Il renferme en outre sur les récents débats philosophiques des vues du plus grand intérêt.

A cet égard, les géométries non-euclidiennes et le principe de relativité nous semblent avoir une importance plus grande que ne leur en attribue M. Duhem. Dans ce domaine un appel au bon sens, conçu comme une base première et indéfinissable, nous paraît dangereux. Au Moyen Age la révolution du soleil et des planètes autour de la terre était une vérité de sens commun. Une étude plus approfondie du mouvement des corps célestes a montré la portée relative de cette vérité. Un raisonnement analogue pourrait s'appliquer aux principes de la géométrie euclidienne et à ceux de la mécanique classique acceptés par le sens commun ; ces principes ne comportent peut-être qu'une vérité relative par rapport à d'autres principes plus généraux qu'une expérience élargie permettrait d'établir. En tout cas, invoquer purement et simplement le sens commun ne suffit pas, nous semble-t-il, pour trancher le débat.

Arnold Reymond, Université de Neuchâtel.

Edouard Goursat. — **Cours d'Analyse mathématique.** Tome III. Seconde édition. *Intégrales infiniment voisines. Equations aux dérivées partielles du second ordre. Equations intégrales. Calcul des variations.* 1 vol. gr. in-8° de VI-668 p. et 23 fig. ; 20 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

L'énorme matière contenue dans ce volume, bien que condensée par M. Goursat d'une façon des plus heureuses, est fort difficile à analyser dans un article aussi limité que celui-ci.

Il y a là douze chapitres (XXIII à XXXIV) ayant tous une importance de premier ordre ; je vais pourtant essayer d'en préciser la portée en disant quelques mots de chacun.

Le premier a trait aux intégrales d'équations différentielles ordinaires infiniment voisines d'intégrales correspondant, soit à de certaines valeurs initiales des variables, soit à des valeurs particulières de paramètres figurant dans les équations. Le second cas est peut-être le premier par la date ; il correspond aux travaux dus à Henri Poincaré et concernent le Problème des trois corps. Ceci nécessitait la considération des *équations aux variations*, qui forment des systèmes linéaires, si bien qu'ici ce sont d'abord de tels systèmes qui sont étudiés en faisant plus particulièrement usage de la méthode d'approximations successives due à M. Emile Picard. Faut-il rappeler toutes les applications mécaniques de telles considérations ; on les retrouve notamment dans la théorie des petits mouvements et le langage

mécanique s'est introduit pour qualifier les solutions de *stables* ou *d'instables*, ce que M. Goursat fait saisir très simplement sur des systèmes particulièrement élémentaires.

En ce qui concerne (Ch. XXIV) les équations aux dérivées partielles du second ordre, on sait que l'auteur a déjà publié, sur leur intégration, un vaste ouvrage en deux volumes. Il n'a eu qu'à en résumer les points les plus essentiels en accordant une importance particulière aux équations de Monge-Ampère. L'étude de ces équations n'est vraiment élémentaire que dans le cas où existent des intégrales intermédiaires, mais, quelque limité que soit celui-ci, il est encore fécond si l'on prend par exemple l'équation de Laplace

$$s + ap + bq + cz + g = 0$$

pour chercher le cas où elle admet une telle intégrale et ramener à celui-ci une infinité de cas récurrents ; une circonstance, bien particulière d'abord, n'en donne pas moins une théorie très étendue.

Les équations à n variables (Ch. XXV) se sont surtout introduites dans la science avec le problème général de la propagation des ondes, du moins lorsqu'elles ont leurs caractéristiques réelles ; M. Goursat nous montre la chose sur des exemples encore très simplement élégants, et, prenant les équations les plus importantes de la théorie de la chaleur, insiste sur la genèse des solutions procédant d'abord de solutions très particulières, ne contenant que des constantes arbitraires $a, b, c, \ldots$, mais qui, multipliées par $\varphi(a, b, c, \ldots)\, da\, db\, dc \ldots$ et alors intégrées dans le domaine $a, b, c, \ldots$, peuvent dépendre de la fonction arbitraire φ. Pour les équations purement linéaires ce fut d'abord là l'essentiel des méthodes de Cauchy et de Fourier, ce qu'il serait injuste d'oublier devant nombre de perfectionnements récents.

L'étude spéciale des équations du type hyperbolique (Ch. XXVI) est précédée par l'étude de l'équation $s = f$, où f est connue. Sans doute une intégration double donnerait immédiatement la solution, mais ne donnerait point l'idée des méthodes variées, imposées par les conditions aux limites des problèmes physiques, dans le cas hyperbolique général. Et nous voyons celles-ci, très simplement, sur $s = f$. Au problème de Cauchy se sont adjoints d'autres problèmes aux limites, notamment celui consistant à déterminer une surface intégrale passant par deux courbes données, qui doit beaucoup aux efforts personnels de M. Goursat. Il faut observer aussi que l'équation des cordes vibrantes ou du mouvement rectiligne d'un gaz n'est pas plus compliquée que $s = 0$. Le cas de $s = f$ est donc déjà très important par lui-même. Vient ensuite la méthode de Riemann, avec sa si importante notion d'équation adjointe, pour quelques équations à cœfficients constants telles que l'équation des télégraphistes. Comme équation à trois variables nous trouvons celle des ondes cylindriques étudiée par M. Volterra ; rappelons que l'ingéniosité d'un géomètre français, M. R. d'Adhémar, met à la base de cette étude une formule analogue à celle de Green, mais où la notion de normale est remplacée par celle de droites symétriques des normales ordinaires et qualifiées de *conormales*.

Pour les équations du type elliptique (Ch. XXVII) l'essentiel est l'équation de Laplace à laquelle satisfait le potentiel logarithmique et qui correspond à la théorie des fonctions analytiques. Les problèmes aux limites sont les plus fameux de tous ; ce sont ceux de Dirichlet et Neumann. Nous voyons

ici successivement les idées fondamentales de Riemann, Neumann, Schwartz, ces dernières liées avec le problème de la représentation conforme, puis une théorie sommaire de la fonction de Green. Certes il peut sembler, au premier abord, que chercher la fonction de Green soit (sauf cas particuliers) aussi difficile que résoudre le problème de Dirichlet par une autre méthode : la difficulté n'aurait fait que changer de nom. Mais de profonds et récents travaux ont justement montré que la fonction de Green avait des propriétés susceptibles d'être généralisées pour des équations elliptiques autres que celle de Laplace et même pour des équations paraboliques, si bien que l'usage de cette fonction a constitué une méthode d'importance croissante. Et, si je ne me trompe, c'est justement ce que M. Goursat met bien en relief.

Pour l'équation de Laplace à trois variables (Ch. XXVIII) les problèmes physiques examinés dans le cas de deux variables peuvent être conservés avec quelques changements parfois assez notables, mais des théories, telles que celle de la représentation conforme, s'évanouissent d'une manière un peu déconcertante. L'intérêt revient ici vers les potentiels ; le Chapitre suivant (XXIX), consacré à l'équation de la chaleur, montre, comme je le disais tout à l'heure, la souplesse de la notion de fonction de Green. On a pu rebâtir, pour l'équation parabolique en litige, une fonction analogue quant à la résolution de certains problèmes aux limites. Signalons aussi que, dans toutes ces questions, M. Goursat a donné une place importante aux si intéressantes transformations qui changent les équations en elles-mêmes et qui permettent, par suite, de déduire de nouvelles solutions de solutions déjà connues. Les nouvelles solutions ont généralement un degré de généralité supérieur à celui des solutions primitives, ce qui fait revenir à l'importante remarque déjà faite à propos du Chapitre XXV.

Nous trouvons maintenant quatre chapitres de la plus haute importance sur les équations intégrales ; vis-à-vis de la prodigieuse accumulation des mémoires originaux, ils seront d'une valeur inestimable et ceci s'explique mieux que par la grande érudition de l'auteur qui a, en outre, apporté une contribution personnelle considérable à ce sujet touffu en commençant par le résumer, à son point de vue, dans un Mémoire publié, en 1908, aux *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*.

La méthode des approximations successives (Ch. XXX) est celle qui permet d'aborder, de la manière la plus simple, d'abord les équations intégrales à limites variables de Volterra, ensuite les équations à limites fixes de Fredholm. Dans les deux cas on obtient comme solutions des séries entières par rapport au paramètre λ figurant dans les équations. Le raisonnement formel est très simple, et si les démonstrations de convergence le sont parfois un peu moins, elles ne laissent plus cependant le moindre doute. Dans le cas de Volterra, la série entière en λ est une fonction entière ; dans le cas de Fredholm, c'est une fonction méromorphe que, conformément à un théorème connu, on peut se proposer de mettre sous la forme du quotient de deux fonctions entières. Pour parvenir à ce but, la méthode d'induction de Fredholm (Ch. XXXI) reste la plus indiquée. Des théorèmes d'un exceptionnel intérêt s'attachent aux fonctions entières ainsi introduites, notamment quant à la détermination de leurs zéros et de leur genre. Qui aurait cru, lorsque Laguerre parlait de cette notion de genre, lorsque Weierstrass faisait connaître ses décompositions en facteurs primaires, que tout ceci interviendrait de manière aussi nécessaire et aussi intime dans ces

équations intégrales nées elles-mêmes des problèmes aux limites de la Physique mathématique? C'est en vue de problèmes physiques qu'on a d'abord introduit le concept de fonctions fondamentales (Ch. XXXII). Elles figurent, en fait, dans les développements trigonométriques de Cauchy et Fourier et sont des sinus ou des cosinus, c'est-à-dire des fonctions satisfaisant à des équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants. Un peu plus tard, dans des problèmes tels que celui du refroidissement d'une barre hétérogène, il fallut tirer les fonctions fondamentales d'équations linéaires à coefficients variables; ce n'était pas beaucoup plus difficile au point de vue formel, mais hors de cela tout restait dans l'ombre, même la convergence des séries obtenues. Combien nous sommes plus avancés aujourd'hui! Les identités intégrales élémentaires qui servent de base à la théorie des séries trigonométriques ont été prodigieusement généralisées et donnent les admirables théories de l'orthogonalité et de la symétrie des noyaux qui peuvent d'ailleurs être exposées à part, comme l'ont fait Hilbert et Schmidt, mais que M. Goursat réunit au reste avec une rare aisance.

Quant aux applications des équations intégrales (Ch. XXXIII), elles concernent les équations différentielles linéaires, en commençant d'abord par l'équation du premier ordre, puis la recherche des solutions périodiques pour les équations à coefficients périodiques, enfin les équations aux dérivées partielles qui nous ramènent aux problèmes de Dirichlet et Neumann, dont la difficulté fut l'aiguillon qui poussa les géomètres dans les magnifiques voies précédentes. Pour ces problèmes et d'autres du même genre, M. Goursat s'est attaché à revenir aux fonctions de Green déjà examinées hors de la théorie des équations intégrales.

D'une manière plus générale, l'éminent géomètre a toujours eu en vue les problèmes anciens et la manière de les accorder avec la théorie récente; ainsi, à propos des équations de Volterra de première espèce, il traite l'équation d'Abel. Tout cela rappelle le criterium d'Hermite qui ne trouvait bonnes les théories nouvelles que quand elles redonnaient tout d'abord les cas particuliers déjà connus. A cet égard l'exposition de la théorie des équations intégrales, telle que M. Goursat vient de la faire, est un modèle du genre. Je crois d'ailleurs qu'on pourrait en dire autant pour l'exposition du Calcul des variations (Ch. XXXIV), car nous y retrouvons, en une centaine de pages, l'essentiel des grands ouvrages dus à MM. Bolza et Hadamard.

Après l'étude de la première variation, qui conduit à l'équation d'Euler, M. Goursat traite en détail le problème pour lequel les extrêmales sont toutes les courbes de Ribaucour; c'est la généralisation du cas archaïque de la cycloïde considérée comme brachistochrone. La seconde notion très importante est celle d'une extrêmale dont les extrémités doivent se mouvoir sur des lignes données, d'où les conditions de *transversalité* fort anciennement considérées dans des cas particuliers, mais dont l'étude vraiment développée n'apparaît qu'avec Kneser. Après les problèmes d'extremum lié (type lignes géodésiques) et les problèmes isopérimétriques, nous retrouvons la méthode d'Euler étendue aux intégrales doubles.

Dans l'étude de la seconde variation, les conditions de Legendre et de Jacobi se lient comme l'équation de Riccati se lie à l'équation linéaire du second ordre; elles conduisent à une très importante interprétation géométrique où des enveloppes d'extrêmales donnent de certains points, nommés

foyers, dont la seule position permet de juger de la réalisation ou de la non-réalisation des conditions en litige (exemples empruntés encore aux courbes de Ribaucour). Mais, d'une manière générale, ces conditions demandent encore à être complétées ; elles l'ont été par un beau théorème de Weierstrass. Si l'on ajoute que, pour pouvoir développer plus complètement les théories de ce dernier, il est nécessaire d'abandonner les courbes définies par une seule équation et de recourir à leur représentation paramétrique, on aura l'idée du chemin aussi complet que condensé suivi par M. Goursat. Les exemples abondent tant dans le texte que dans les compléments et exercices reportés à la fin du chapitre.

La même remarque peut d'ailleurs être faite pour tous les chapitres de cet ouvrage qui, parmi les publications de ces dernières années, n'a point son égal. En matière de théorie des fonctions, d'équations différentielles ou intégrales, de calcul des variations, les extrêmes développements de la science ont poussé les jeunes auteurs vers les monographies. Nous devons être reconnaissants à qui nous présente les mêmes trésors nettement rattachés à toute la glorieuse science des précédentes générations.

A. Buhl (Toulouse).

Léon Lecornu. — **Cours de Mécanique** professé à l'Ecole polytechnique. — Tome II. — 1 vol. gr. in-8° de IV-538 p. et 110 fig. ; 18 fr.; Gauthier-Villars Paris.

Ce second volume débute par les théorèmes généraux relatifs à la Dynamique des systèmes de points ; l'auteur n'a pas commencé par considérer des groupes de $3n$ équations. Avec les notions de somme, de dérivée géométrique, il exprime chaque théorème par une seule équation, mais il ne fait ainsi usage du calcul vectoriel que dans des cas où tout le monde peut l'employer sans étude spéciale ; le bénéfice est notable.

Il revient d'ailleurs ensuite aux équations développées.

Pour l'étude des systèmes à liaisons, le principe de d'Alembert est immédiatement introduit et appliqué aussi bien à un système très simple ne comprenant que deux points, qu'au *fil* qui en comprend une infinité ; le dit principe est d'ailleurs combiné avec celui des travaux virtuels. On peut alors traiter, de la manière la plus naturelle, certains problèmes où les liaisons sont figurées par des courbes déformables (comme dans le pendule de longueur variable), problèmes auxquels, si je ne me trompe, M. Lecornu a consacré d'importants travaux personnels.

Des pages intéressantes sont consacrées aux systèmes isolés qui semblent cependant pouvoir modifier leur orientation (problèmes du chat et analogues), au principe de la moindre contrainte, dû à Gauss, mais dont toute la fécondité n'a certainement pas été remarquée du temps de Gauss, et à la mécanique de Hertz qui remplace les forces par les liaisons avec adjonction de masses cachées, telle que celle de l'éther. Pour Hertz il y avait là un point de départ tandis qu'ici la chose est toujours en dépendance du principe de d'Alembert et du théorème du travail virtuel.

Quant aux applications des théorèmes généraux sous leur forme la plus classique, M. Lecornu a su trouver une collection de jolis problèmes ; signalons celui des quatre points formant un losange qui semble pouvoir se retourner dans son plan sans forces extérieures et, ce qui est mieux, sans variation du moment d'inertie.

Après une théorie sommaire des percussions, nous abordons les équations de Lagrange dont nous examinons rapidement la transformation pour les systèmes non holonomes ; elles permettent, de plus, de revenir aux percussions et d'aborder enfin la théorie des petits mouvements qui s'est étendue à toutes les branches de la Physique.

Laissons les systèmes ponctuels et passons aux solides. Après les généralités habituelles (pendule composé, métronome), les notions déjà acquises en matière de percussion permettent de traiter le pendule balistique et la question, réciproque pour ainsi dire, du canon pendule.

Le cas du corps cylindrique roulant sur un plan est peu différent du corps à axe fixe ; il est illustré par l'appareil Desdouits, cylindre circulaire décentré qui, roulant sur un plan, dans un train en marche, permet d'en mesurer l'accélération.

L'étude du mouvement autour d'un point fixe a pu sembler, pendant longtemps, assez superflue à l'ingénieur, au mécanicien pratique qui ne connaissait aux pièces qu'un seul degré de liberté. Si l'on attirait parfois son attention sur les gyroscopes, il n'y voyait guère autre chose que de merveilleux jouets, mais une telle manière d'envisager les choses semble maintenant de moins en moins permise. Admettons même que le gyroscope dont l'axe reste invariablement pointé sur une étoile n'ait de l'intérêt que pour l'astronome ou le voyageur ; il n'en restera pas moins qu'il peut s'introduire, comme stabilisateur, dans les navires et les aéroplanes, dans ces curieux chemins de fer à rail unique et qu'enfin les gros projectiles modernes — d'un emploi si fréquent, hélas ! — ne peuvent être théoriquement considérés comme des points : l'usage des équations d'Euler sera indispensable pour étudier la manière dont ils se comportent autour de leur centre de gravité. M. Lecornu a su faire transparaître tout cela, avec une grande habileté, derrière des préliminaires analytiques pour lesquels les praticiens manifestent un respect parfois exagéré.

A signaler encore quelques pages bien intéressantes sur les mouvements des systèmes déformables, ce qui, pour certains, est d'ailleurs analogue à l'étude déjà faite des systèmes de points qui semblent se mouvoir autrement que ne le permet l'absence de forces extérieures.

Il y a là notamment une jolie théorie de l'escarpolette.

En matière de solides invariables quant à leur intérieur reste à considérer l'état, aussi réel que possible, de leur surface. C'est la théorie du frottement si riche en paradoxes. Pour un même mouvement, envisagé en pratique, le frottement peut éteindre les glissements, les permettre à nouveau et ainsi de suite. Et, dans chaque cas, les équations du mouvement sont différentes ! Un principe directeur des plus importants a été mis en lumière par M. Appell ; il semble, dans les cas naturels, qu'un système se comporte comme s'il cherchait à échapper au frottement, serait-ce au prix d'une complication de mouvement. M. Lecornu a largement tiré parti de ces idées et nous a même présenté le mouvement *louvoyant*.

Nous abordons ensuite le choc des solides ; hors de l'allure classique qu'on retrouve dans le cas des billes de billard, nous avons ici encore d'ingénieux problèmes comme, par exemple, celui du cas où une roue choquant un obstacle passe ou non par-dessus celui-ci.

Voyons maintenant les corps partout déformables, la théorie de l'élasticité.

M. Lecornu suit la méthode de Lamé. Pour obtenir les équations géné-

rales de l'équilibre et du mouvement d'une masse continue, il raisonne uniquement sur un parallélipipède élémentaire. On sait pourtant qu'on peut raisonner à la fois sur tous les éléments composant un solide, d'où des transformations d'intégrales multiples régies par la formule de Green mais, ce qui semble très intéressant, c'est que, sans employer d'abord cette méthode, l'auteur vient, en second lieu, à un raisonnement fort analogue qui est, pour lui, une application du théorème du travail virtuel. L'intérêt est tout aussi puissant, un peu plus loin, quand pour calculer le travail nécessaire à une déformation donnée, il faut introduire le potentiel interne de Clapeyron ; c'est encore au théorème du travail virtuel que M. Lecornu demande l'essentiel. Et pas une seule des intégrales multiples employées ne semble dépourvue de signification physique ce qui est peut-être un inconvénient, au moins en apparence, dans des applications répétées de la formule de Green.

Les applications de la théorie de l'équilibre élastique sont tangibles, pratiques et, dans ces conditions, d'une élégance parfois inattendue. C'est le frettage des canons qui consiste à faire serrer un tube par un autre d'abord fortement chauffé puis la théorie des meules en rotation rapide. Le fameux problème de Saint-Venant (équilibre d'un prisme soumis à des forces agissant sur les bases) est d'un esprit analogue. Très important en pratique, il correspond aussi, au point de vue analytique, à des possibilités de calcul particulièrement complètes ; il permet notamment de bien distinguer, dans le phénomène complexe, des phénomènes plus simples d'extension, de flexion, de torsion.

Faut-il rappeler aussi qu'il comprend des interprétations d'une grande valeur esthétique, que, par exemple, la théorie de la courbe élastique revient à celle de mouvements pendulaires ou de mouvements à la Poinsot. L'élasticité des solides se termine par l'étude de leurs vibrations ; nous arrivons notamment à l'étude de la propagation de la lumière dans l'éther et dans les cristaux.

Dans la mécanique des fluides, on peut passer rapidement sur l'hydrostatique ; le plus remarquable est que cette science puisse prendre une allure presque purement géométrique où des constructions fort simples remplacent les calculs. Toutefois il est clair, en vertu du principe de d'Alembert, que l'hydrostatique reste fondamentale pour donner les équations de l'hydrodynamique ; celles auxquelles on parvient ainsi de la manière la plus naturelle sont celles d'Euler et de Lagrange. Combien difficiles apparaissent les problèmes généraux ! Mais il y a des solutions périodiques par rapport au temps qui sont très simples et donnent la *houle ;* une combinaison de ces solutions donne le *clapotis*. Rien de plus heureux que le caractère quasi immédiat de ces applications.

Il est ensuite nécessaire, notamment pour l'étude des mouvements tourbillonnaires, de faire subir aux équations générales une transformation due à Cauchy et développée par Helmholtz. C'est ici qu'apparaissent les si curieuses propriétés auto-conservatives des tourbillons dont l'action, sur une molécule quelconque de la masse, est d'ailleurs celle de courants électriques sur un pôle magnétique. C'est ici aussi que se place fort naturellement une théorie rapide des trombes et cyclones avec des équations dont plusieurs se pourraient tirer de la dynamique élémentaire.

Le mouvement permanent, son étude au piézomètre (tube enfoncé verticalement dans le liquide) se présentent avec la même facilité. La translation uniforme d'un solide dans un fluide parfait, qui doit se faire sans résistance

(paradoxe de d'Alembert), a donné lieu à de nombreuses controverses dont quelques-unes, récemment publiées aux *Comptes rendus*, nous sont rappelées par M. Lecornu. La conclusion aussi certaine qu'évidente est que, dans l'hydraulique naturelle, on ne peut négliger la viscosité ; c'est par l'étude de celle-ci que le volume se termine. La viscosité dans les écoulements donne lieu à des pertes de charge codifiées expérimentalement en les lois de Poiseuille maintenant retrouvées d'une manière analytique très satisfaisante. L'hydraulique a gardé le cachet dont tout le volume est empreint quant à une analyse toujours posée sur des fondements rigoureux mais invariablement dirigée vers les cas les plus simples fournis par la pratique. C'est l'enseignement polytechnicien par excellence. Et cependant, comme le dit M. Lecornu dans un avertissement de trois lignes, il n'y a là que de la mécanique rationnelle et des applications *immédiates*. L'exposé des méthodes adaptées à l'Art de l'ingénieur est réservé pour un troisième volume.

A. Buhl (Toulouse).

D. Mazkewitsch. — **Ueber projektivische Strahlen und Punktinvolutionen,** und einige Erzeugnisse derselben. Thèse de doctorat, Berne 1915. — 1 fasc. in-8°, 75 p.; Müller, Werder & C°, Zurich.

Le travail traite la génération de certaines courbes de 4e ordre et de 4e classe d'après un principe déjà employé par M. Crelier[1] pour l'étude des courbes de 3e ordre et de 3e classe. En s'appuyant sur les travaux déjà cités, il traite, dans un premier chapitre, les propriétés des correspondances (2,2) (un élément de la première correspondance correspond à deux de la deuxième et inversement) par rapport aux éléments conjugués, aux éléments doubles, triples, par rapport aux axes, aux éléments rectangulaires conjugués, etc. Les courbes de 4e ordre sont ainsi engendrées par les éléments conjugués de deux involutions homographiques. Les recherehes du premier chapitre sur les éléments singuliers fournissent de suite les singularités des courbes telles que : points doubles, tangentes doubles, points triples, points de rebroussement, etc. Un dernier chapitre intéressant traite les cas spéciaux des correspondances. Ils dépendent de positions spécialement choisies. Nous citerons le cas où la courbe de 4e ordre se décompose en une courbe de 3e ordre et une droite lorsque deux éléments coïncident, en une conique et une droite double lorsque deux éléments conjugués doubles coïncident et ainsi que les cas dualistiques des courbes de 4e classe. En résumé, le travail est une jolie contribution à l'étude de la génération des courbes à l'aide des correspondances non univoques. Kistler (Bienne).

R. H. Weber u. R. Gans. — **Repertorium der Physik.** Erster Band : Mechanik u. Wärme, Erster Teil : Mechanik, Elastizität, Hydrodynamik u. Akustik. — 1 vol. cart. p. in-8°, 434 p.; 8 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

Le succès remporté par le *Repertorium der Mathematik* dirigé par le professeur Ern. Pascal (Naples) a engagé la librairie Teubner à publier un *Repertorium der Physik*. Il s'agit d'un guide formant un intermédiaire entre les manuels de l'enseignement secondaire et les grands traités et destinés à orienter rapidement l'étudiant dans les différents domaines de la Physique

[1] *Ens. math.*, 1906, 1907, 1908, 1913.

théorique. A la suite du développement considérable qu'ont pris les sciences expérimentales, une publication de ce genre peut rendre de grands services. Le soin que les auteurs ont apporté à la rédaction de ce premier volume assurent à cet *abrégé* des sciences physiques le même accueil qu'a rencontré l'*abrégé* des sciences mathématiques du professeur Pascal.

Ce premier volume comprend trois sections :

I. Mécanique des masses. Principes de la mécanique.

II. Mécanique des milieux continus. Elasticité. Hydrodynamique.

III. Acoustique.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

---

1. Publications périodiques :

Annaes scientificos da Academia polytechnica do Porto, directeur F. Gomes Teixeira. — Vol. X, 1915. Imprensa da Universidade, Coimbra.

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze matematiche, pubblicato per cura di Gino Loria. Anno XVII, 1915. — Rosenberg & Sellier, Torino.

Bollettino di Matematica. Giornale scientifico didattico per l'incremento degli Studi matematici nelle scuole medie. Diretto dal Dott. Alb. Conti. Anno XIV. Roma, 1915.

Contribución al Estudio de las Ciencas físicas y matemáticas, Universidad nacional de la Plata. Vol. I.

Giornale di Matematiche di Battaglini, diretta da Ernesto Pascal, colla collaborazione di P. del Pezzo, A. del Re, R. Marcolongo, D. Montesano, G. Torelli. Vol. LIII (6° della 3ª Serie). Pellerano, Naples.

Intermédiaire des Mathématiciens, dirigé par C.-A. Laisant, Ed. Maillet, A. Maluski, A. Boulanger. — Tome XXII, 1915. — Gauthier-Villars, Paris.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von Em. Lampe. B. 43, Jahrgang 1912. — G. Reimer, Berlin, 1915.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié par H. Vuibert, 39e année, 1914-1915. — Librairie Vuibert, Paris.

Mathematical Gazette (The), edited by W.-J. Greenstreet, 1915. — George Bell & Sons, Londres.

Mathematics Teacher (The). A Magazine devoted to the interests of Teachers of Mathematics, published quarterly by the Association of Teachers of Mathematics for the Middle States and Maryland. Editor : W. H. Metzler, Syracuse, N.-Y.; Vol. VII, 1914-1915.

Mathematisch-Naturwissenschaftlische Blätter. Organ des Verbandes mathematischer u. naturwissenschaftlicher Vereine an deutschen Hochschulen, 12. Jahrgang, 1915. — Kommissionsverlag, B. G. Teubner, Leipzig.