LE PROBLÈME D'INTERPOLATION ET LA FORMULE DE TAYLOR

Autor(en): **Suppantschitsch, R.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **17 (1915)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-16312

en effaçant soit la dernière, soit l'avant-dernière ligne, est une développable de classe 64. Cette développable se décompose en :

1° la développable de classe 34 lieu des plans rencontrant les sept couples de droites donnés en des couples de points conjugués par rapport à une même conique;

2° la développable de classe 20 lieu des plans rencontrant les cinq couples de droites d_1, d_1'; ... ; d_5, d_5' en des couples de points conjugués par rapport à ∞^1 coniques;

3° les faisceaux de plans d'axes d_1, d_1', ..., d_5, d_5'.

Les plans rencontrant six couples de droites en six couples de points conjugués par rapport à une conique, enveloppent une surface de classe huit contenant simplement les douze droites données.

Les plans rencontrant cinq couples de droites en des couples de points conjugués par rapport aux coniques d'un faisceau, enveloppent une développable de classe vingt.

7 juillet 1914.

LE PROBLÈME D'INTERPOLATION ET LA FORMULE DE TAYLOR

PAR

R. Suppantschitsch (Vienne).

---

1. — Porté par le désir de ne pas partir dans l'enseignement du théorème de Taylor, d'une formule toute faite qu'on vérifie en calculant l'erreur commise, j'ai abordé dans cette *Revue*[1] en 1901, le problème de tirer immédiatement la formule de Taylor de celle de la moyenne. La méthode que j'ai imaginée dans ce but n'a pas été exacte.

On ne saurait pas, évidemment, surpasser la simplicité de la démonstration usuelle du théorème de Taylor, et cependant le désir subsiste de suggérer préalablement aux élèves la forme des coefficients de cette formule comme le témoignent les essais répétés et quelquefois malaisés d'y arriver au moins pour les trois premiers coefficients. On obtient facilement les deux premiers, mais le troisième exige déjà des raisonnements assez compliqués. Si nous nous bornons à des méthodes qu'on pourrait encore appli-

---

[1] Sur la démonstration du théorème de Taylor, l'*Enseignement mathématique*, t. 3 (1901), p. 355-357.

quer aux autres coefficients, sauf un calcul plus long, nous avons surtout deux voies à choisir. Nous pouvons partir, en effet, du développement d'un polynome quelconque $P(x) = P(x_0 + (x - x_0))$ en série de puissances de $(x - x_0)$ et obtenir, de cette manière, la forme de la formule de Taylor dans un cas particulier. Nous l'étendrons par analogie à des fonctions quelconques, possédant les dérivées successives, et ensuite, nous la vérifierons par la méthode usuelle. J'ai choisi cette voie dans mes manuels d'Algèbre et d'Analyse. Mais nons pouvons commencer encore par la formule d'interpolation de Lagrange ou par celle de Newton. De cette manière nous trouvons même les formules plus générales dues à Hermite et une autre particulièrement intéressante établie par Jacobi et étudiée récemment par M. Montel[1], dont j'ai donné une démonstration élémentaire[2]. On sait d'ailleurs que la formule de Newton, simplifiée par l'hypothèse des points intermédiaires équidistants, conduit immédiatement à celle de Taylor, lorsqu'on fait tendre vers zéro l'intervalle commun. Ici, je me propose d'étudier les relations entre les formules générales de Lagrange et de Newton et celle de Taylor, de manière que le raisonnement soit rigoureux et, néanmoins, reste assez simple pour le premier enseignement de ces théorèmes.

2. — Considérons les deux suites des nombres :

$$\alpha < a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < \beta$$
$$A_1\ ,\ A_2\ ,\ A_3\ ,\ \dots\quad A_n$$

où l'on ait

$$A_i = f(a_i)\ ,$$

$f(x)$ étant une fonction, dont les dérivées existent jusqu'à celle d'ordre n. Cherchons un polynome $\varphi(x)$, du degré $(n - 1)$ au plus, qui prenne les valeurs A_i aux points a_i. La fonction :

$$A_i \frac{(x - a_1) \dots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \dots (x - a_n)}{(a_i - a_1) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_n)}$$

est égale à A_i pour $x = a_i$, et égale à *o* pour $x = a_1, a_2, \dots a_{i-1}, a_{i+1}, \dots a_n$. Nous trouvons ainsi pour le polynome $\varphi(x)$ la formule de Lagrange :

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{(x - a_1) \dots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \dots (x - a_n)}{(a_i - a_1) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_n)}\ .$$

On démontre facilement l'unicité de la solution.

---

[1] Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, collection Borel, Paris, 1910.

[2] Sur un développement en série des puissances d'un polynome. Comptes rendus, t. 158, p. 1655-1657 (8 juin 1914).

Pour $n = 2$ on a:

$$\varphi(x) = \frac{A_1}{a_1 - a_2}(x - a_2) + \frac{A_2}{a_2 - a_1}(x - a_1)$$

ou

$$\varphi(x) = C_1 + C_2(x - a_1)$$

en posant

$$C_1 = A_1 ,$$

$$C_2 = \frac{A_1}{a_1 - a_2} + \frac{A_2}{a_2 - a_1} .$$

Faisons tendre a_2 vers a_1; nous aurons:

$$\lim_{a_2 = a_1} C_2 = \lim_{a_2 = a_1} \frac{A_1 - A_2}{a_1 - a_2} = f'(a_1)$$

et par conséquent

$$\varphi(x) = f(a_1) + f'(a_1)(x - a_1) .$$

3. — Pour $n = 3$ nous avons:

$$\varphi(x) = A_1\frac{(x - a_2)(x - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} + A_2\frac{(x - a_1)(x - a_3)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)} + A_3\frac{(x - a_1)(x - a_2)}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)} .$$

Mettons:

$$A_1\frac{(x - a_2)(x - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} = A_1\frac{(x - a_2)(x - a_1 + a_1 - a_3)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} ,$$

$$= A_1\frac{(x - a_2)(x - a_1)}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} + A_1\frac{x - a_2}{a_1 - a_2} ,$$

et de même:

$$A_2\frac{(x - a_1)(x - a_3)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)} = A_2\frac{(x - a_1)(x - a_2)}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)} + A_2\frac{x - a_1}{a_2 - a_1}$$

et par conséquent:

$$\varphi(x) = A_1\frac{x - a_2}{a_1 - a_2} + A_2\frac{x - a_1}{a_2 - a_1}$$

$$+ (x - a_1)(x - a_2)\left[\frac{A_1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} + \frac{A}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)} + \frac{A_3}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)}\right] .$$

Cela nous donne en vertu du n° 2 :

$$\varphi(x) = C_1 + C_2(x - a_1) + C_3(x - a_1)(x - a_2) ,$$

$$C_1 = A_1 , \qquad C_2 = \frac{A_1}{a_1 - a_2} + \frac{A_2}{a_2 - a_1} .$$

$$C_3 = \frac{A_1}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} + \frac{A_2}{(a_2 - a_1)(a_2 - a_3)} + \frac{A_3}{(a_3 - a_1)(a_3 - a_2)} .$$

C'est en somme la méthode de Gauss.

Posons :

$$a_1 = a , \qquad a_2 - a_1 = h_1 , \qquad a_3 - a_2 = h_2$$

et par conséquent:

$$C_1 = f(a) , \qquad C_2 = -\frac{f(a)}{h_1} + \frac{f(a + h_1)}{h_1} ,$$

$$C_3 = \frac{f(a)}{h_1(h_1 + h_2)} - \frac{f(a + h_1)}{h_1 h_2} + \frac{f(a + h_1 + h_2)}{(h_1 + h_2)h_2}$$

$$= \frac{1}{h_1 + h_2}\left[\frac{f(a + h_1 + h_2) - f(a + h_1)}{h_2} - \frac{f(a + h_1) - f(a)}{h_1}\right].$$

Faisons tendre h_1 vers zéro. Cela nous donne:

$$\lim_{h_1=0} C_1 = f(a) , \qquad \lim_{h_1=0} C_2 = f'(a) ,$$

$$\lim_{h_1=0} C_3 = \frac{1}{h_2}\left[\frac{f(a + h_2) - f(a)}{h_2} - f'(a)\right] .$$

Faisons tendre ensuite vers zéro h_2, ce qui donne:

$$\lim_{h_2=0,\ h_1=0} C_1 = f(a) , \qquad \lim_{h_2=0,\ h_1=0} C_2 = f'(a) ,$$

$$\lim_{h_2=0,\ h_1=0} C_3 = \lim_{h_2=0} \frac{f(a + h_2) - f(a) - h_2 f'(a)}{h_2^2} .$$

Cette limite s'obtient par la règle de l'Hospital:

$$\lim_{h_2=0} \frac{f(a + h_2) - f(a) - h_2 f'(a)}{h_2^2} = \lim_{h_2=0} \frac{f'(a + h_2) - f'(a)}{2h_2} = \frac{1}{2} f''(a) ,$$

et par conséquent:

$$\lim_{h_2=0,\ h_1=0} C_3 = \frac{1}{2} f''(a) .$$

Nous avons donc les trois premiers termes de la formule cherchée:

$$\varphi(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2 \dots \quad (1)$$

On en calcule l'erreur commise par la méthode de Cauchy.

4. — Remarquons que le raisonnement du numéro précédent n'est pas suffisamment général, puisque nous devons faire tendre vers zéro d'abord h_1 et ensuite h_2. L'inconvénient, c'est vrai, n'est pas grave, notre but n'étant que de suggérer la formule (1) qui sera vérifiée par le calcul de l'erreur commise. Cependant, on y peut parer par un théorème, intéressant peut-être en lui-même. C'est le théorème:

Si f(x) *admet des dérivées continues* f'(x) *et* f''(x) *dans l'intervalle* $\alpha < x < \beta$ *et si* a *et un nombre compris entre* α *et* β, *les valeurs de* Θ *dans la formule de la moyenne:*

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a + \Theta h)$$

considérées comme fonctions de h *ont pour limite* $\frac{1}{2}$, *lorsque* h *tend vers zéro.*

On a en effet:

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a) + \Theta h^2 f''(a + \Theta_1 \Theta h) \ ,$$

ou:

$$\Theta f''(a + \Theta_1 \Theta h) = \frac{f(a + h) - f(a) - hf'(a)}{h^2} \ ,$$

et, si h tend vers zéro, la règle de l'Hospital nous donne:

$$\Theta f''(a) = \frac{f''(a)}{2} \ .$$

5. — Reprenons maintenant le problème du n° 3.

Faisons:

$$C_3 = \frac{1}{h_1 + h_2}[f'(x + h_1 + \Theta_2 h_2) - f'(x + \Theta_1 h_1)] = \frac{(1 - \Theta_1) h_1 + \Theta_2 h_2}{h_1 + h_2} f''(\xi) \ ,$$

et

$$f''(\xi) = f''\{a + \Theta_3[(1 - \Theta_1) h_1 + \Theta_2 h_2]\} \ .$$

Nous avons encore:

$$C_3 = \Theta_2 f''(\xi) + \frac{1 - \Theta_1 - \Theta_2}{h_1 + h_2} h_1 f''(\xi) \ .$$

En vertu du n° 4 les Θ_1 et Θ_2 tendent vers $\frac{1}{2}$, si h_1 et h_2 tendent vers zéro. Le terme contenant $(1 - \Theta_1 - \Theta_2)$ tend donc vers zéro et nous avons enfin :

$$\lim_{h_1=0,\ h_2=0} C_2 = \frac{1}{2} f''(a) ,$$

h_1 et h_2 tendant vers zéro d'une manière quelconque.

6. — Pour donner l'idée de la généralisation, démontrons encore la formule générale de Newton par la méthode de Gauss, à laquelle nous ajoutons le raisonnement par l'induction complète.

Posons à cet effet :

$$C_1 = A_1$$

$$C_j = \sum_{i=1}^{j} \frac{A_i}{(a_i - a_1) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_j)} .$$

et admettons la formule de Newton pour l'entier $n = m$, c'est-à-dire :

$$\varphi_m(x) = \sum_{i=1}^{m} A_i \frac{(x - a_1) \dots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \dots (x - a_m)}{(a_i - a_1) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_m)}$$

$$= C_1 + C_2(x - a_1) + C_3(x - a_1)(x - a_2)$$

$$\dots + C_m(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{m-1}) .$$

Mettons ensuite dans la formule :

$$\varphi_{m+1}(x) = \sum_{i=1}^{m+1} A_i \frac{(x - a_1) \dots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \dots (x - a_{m+1})}{(a_i - a_1) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_{m+1})} ,$$

au lieu des m premiers termes les expressions respectives :

$$A_i \frac{(x - a_1) \dots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \dots (x - a_m)(x - a_i)}{(a_i - a_1) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_{m+1})}$$

$$+ A_i \frac{(x - a_1) \dots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \dots (x - a_m)}{(a_i - a_1) \dots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \dots (a_i - a_m)} .$$

Nous aurons :

$$\varphi_{m+1}(x) = C_{m+1}(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_m) + \varphi_m(x) ,$$

ou bien en effet :

$$\varphi_{m+1}(x) = C_1 + C_2(x - a_1) + \dots$$

$$+ C_{m+1}(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_{m+1}) . \qquad (2)$$

7. — Ecrivons maintenant :

$$C_1\ ,\qquad C_2 = C_2(a_1\,,\ a_2)\ ,\qquad C_3 = C_3(a_1\,,\ a_2\,,\ a_3)\ \ldots\ .$$

La relation évidente :

$$C_i(a_1\,,a_2\,,\ldots a_i) = \frac{1}{a_1 - a_i}\left\{C_{i-1}(a_1\,,a_2\,,\ldots a_{i-1}) - C_{i-1}(a_2\,,a_3\,,\ldots a_i)\right\} \tag{3}$$

nous permet alors de passer, par un calcul connu, de la formule (2) à la formule de Newton dans le cas particulier des points intermédiaires équidistants.

La relation (3) pourrait être utile encore, si l'on voulait généraliser le raisonnement du n° 3. On aurait en effet :

$$C_4 = -\frac{1}{h_1 + h_2 + h_3}\left\{\frac{1}{h_1 + h_2}\left[\frac{f(a+h_1+h_2) - f(a+h_2)}{h_2} - \frac{f(a+h_1) - f(a)}{h_1}\right]\right.$$
$$\left. - \frac{1}{h_2 + h_3}\left[\frac{f(a+h_1+h_2+h_3) - f(a+h_1+h_2)}{h_3} - \frac{f(a+h_1+h_2) - f(a+h_1)}{h_2}\right]\right\}$$

où l'on ferait tendre vers zéro h_1, puis h_2, puis h_3. On voit que par la nature même du problème les calculs deviennent rapidement très compliqués. Ils seraient encore plus longs, si l'on voulait imiter le raisonnement plus général du n° 4 ; mais cela rendrait rigoureuse, s'il était nécessaire, ma démonstration de 1901.

Remarquons aussi que les limites des C_1, C_2, C_3, ... peuvent exister même si les dérivées $f'(x)$, $f''(x)$, ... n'existent pas. On obtiendrait dans ce cas la forme d'un développement plus général que celui de Taylor, mais il serait très difficile de le justifier par le calcul de l'erreur commise, la méthode de Cauchy ne donnant plus rien. Je me borne ici à signaler cette difficulté.

J'insiste encore sur le fait que les questions traitées ici ne sortent pas de l'intérêt purement pédagogique, à l'exception peut-être du théorème du n° 4.
