Complément.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **16 (1914)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

59850 gr., tandis que l'altitude g_4 de son centre de gravité reste $\frac{36,096}{7}$ cm.;

un corps homogène c_5 de mêmes dimensions que c_2, mais de densité 57, donc $\frac{57}{17}$ fois plus lourd; son poids m_5 sera par conséquent $\frac{57}{17}$ 15096 = 50616 gr., tandis que l'altitude g_5 de son centre de gravité reste $\frac{201}{37}$ cm.

Nous arriverons ainsi à $m_3 = m_4 - m_5 = 59850 - 50616 =$ 9234 gr. comme poids de l'or du corps c, et aux relations suivantes pour l'altitude g_3 de son centre de gravité :

$$m_3 g_3 = m_4 g_4 - m_5 g_5 = 59850 \frac{36,096}{7} - 50616 \frac{201}{37}$$

$$9234 g_3 = 8550 \times 36,096 - 1368 \times 201 = 33652,8 \ ,$$

d'où $g_3 = 3,6444$ cm.

Quant à l'argent du corps c, son poids sera

$$m - m_3 = 13254 - 9234 = 4020 \text{ gr.}$$

et l'altitude de son centre de gravité

$$\frac{mg - m_3 g_3}{m - m_3} \quad \text{soit} \quad \frac{64180,8 - 33652,8}{4020} = 7,5940 \text{ cm.}$$

On voit que cette seconde méthode conduit aux mêmes résultats que la première. Les deux méthodes ayant fait intervenir de deux façons très différentes certaines propriétés de la pyramide générale à n dimensions, il y a tout lieu de croire que ces propriétés, établies par induction, sont vraies.

Complément.

Nous nous proposons ici de démontrer par déduction, mais sans le secours du calcul intégral, les propriétés fondamentales de la pyramide à n dimensions :

« La capacité de la pyramide à n dimensions est égale au produit de la base par la $n^{\text{ième}}$ partie de la hauteur ;

« la distance de la base au centre de gravité est égale à la $(n+1)^{\text{ième}}$ partie de la hauteur. »

Il est à remarquer que n peut aussi être plus petit que 3. Pour $n = 1$ on obtient un segment de droite dont une extrémité fera « sommet » et dont l'autre fera « base » ; la « capacité » se réduit à la longueur ou « hauteur », la base étant remplacée par la puissance zéro d'une longueur, c'est-à-dire par l'unité ; le centre de gravité sera le point milieu. Pour $n = 2$ on obtient un triangle, dont la surface est égale au produit de la base par la moitié de la hauteur, tandis que la distance de la base au centre de gravité est le tiers de la hauteur.

Désignons par H la hauteur de la pyramide, par B la base et par V la capacité ; écrivons $V = i\,HB$, i étant un facteur constant. Il s'agit de démontrer que $i = \frac{1}{n}$.

A cet effet supposons qu'on agrandisse très peu la pyramide, simplement en appliquant sur sa base (à $n - 1$ dimensions) une couche d'épaisseur constante e et de capacité Be.

La pyramide augmentée, de capacité V' et de hauteur $H + e$, doit être semblable à la pyramide donnée, de capacité V et de hauteur H ; comme elles sont à n dimensions, on aura donc $\frac{V'}{V} = \left(\frac{H+e}{H}\right)^n = \left(1 + \frac{e}{H}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}\frac{e}{H} + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\left(\frac{e}{H}\right)^2 \cdots + \left(\frac{e}{H}\right)^n$ en développant d'après la loi du binôme de Newton. $\frac{e}{H}$ étant supposé très petit, nous en négligerons les puissances supérieures et nous poserons simplement

$$V' = V + Vn\,\frac{e}{H}, \qquad \text{soit}$$

$$V' - V = Vn\,\frac{e}{H} = iHBn\,\frac{e}{H} = inBe$$

pour l'agrandissement de la pyramide donnée. Or pour que ce résultat soit compatible avec Be, capacité de la couche ajoutée, il faut qu'on ait

$$in = 1 \qquad \text{soit} \qquad i = \frac{1}{n}.$$

le premier point qu'il fallait démontrer.

Désignons par jH la distance du centre de gravité de la pyramide donnée à la base B, j étant un facteur constant. Il s'agit de démontrer encore que $j = \frac{1}{n+1}$.

Dans ce but continuons à étudier l'effet de la couche additionnelle d'épaisseur e. Cette épaisseur étant très faible par rapport à H, on peut dire que l'adjonction de la couche doit augmenter de HBe le moment de la pyramide par rapport à son sommet, moment qui avait pour mesure W le produit de V par la distance $(1 - j)$ H.

La pyramide augmentée restant semblable à la pyramide primitive, on aura

$$\frac{W'}{W} = \frac{H'V'}{HV} = \left(\frac{H+e}{H}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{e}{H}\right)^{n+1} = 1 + (n+1)\frac{e}{H}$$ en négligeant les puissances supérieures de $\frac{e}{H}$. On aura donc

$$W' - W = W(n+1)\frac{e}{H} = (1-j)(n+1)\,Ve = (1-j)\frac{n+1}{n}\,HBe$$

pour l'agrandissement du moment, et ce résultat ne sera compatible avec HBe, moment de la couche$_1$ que si l'on a

$$(1-j)\frac{n+1}{n} = 1 \qquad \text{soit} \quad 1 - j = \frac{n}{n+1} \text{ ou } j = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1},$$

le second point qu'il fallait démontrer.

J. Sauter et F. Trosset.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Pri la funkcia ekvacio $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

En mia lasta artikolo *(L'Enseignement mathématique,* 15 sept. 1913, p. 390), mi serĉis ĉiujn mezureblajn solvojn de la ekvacio $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Mi, por tio, pruvis ke se iu mezurebla solvo estas nula kiam x estas racionala, ĝi estas ĉie nula.

Sed mi ĵus rimarkis ke tiu lasta teoremo estis jam pruvita en 1907 de Sro Lebesgue *(Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino,* vol. XLII, 10 marzo 1907) kaj mi deziras atentigi pri tiu antaŭeco. Lia solvo estas cetere malsimila kaj staras sur la nocio « aro el dua katogorio ».

Poitiers, 1 février 1914. M. Fréchet.
