DÉFINITION DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES PAR LEUR THÉORÈME D'ADDITION

Autor(en): **Schuepp, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1912)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-14290

($\mathbf{a} \wedge \nabla$ est un nouvel *opérateur symbolique!*) ; elles correspondent, avec nos notations, aux

$$- \operatorname{div} \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \frac{d\mathbf{b}}{dP} \mathbf{a} \,, \qquad - \operatorname{div} \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + K \frac{d\mathbf{b}}{dP} \mathbf{a} \,.$$

Il est bien entendu que M. JAUMANN obtient tout cela avec les coordonnées et ensuite ses opérateurs symboliques font ressembler ses formules à de véritables hiéroglyphes égyptiens. Il n'y a rien d'absolu et de concret dans ces opérateurs ; rien qui soit pratique et qui réponde aux idées logiques précises de l'œuvre magistrale de HAMILTON.

Ces opérateurs symboliques, semblables à ceux dont GIBBS et ses élèves font un si large usage, sont donc inutiles et ils ont beaucoup retardé le développement logique du calcul vectoriel. Nous espérons l'avoir démontré, d'après ce que nous avons dit.

C. BURALI-FORTI (Turin) et R. MARCOLONGO (Naples).

DÉFINITION DES FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES PAR LEUR THÉORÈME D'ADDITION

M. OSGOOD, dans son livre sur la Théorie des fonctions[1], démontre que toutes les fonctions, possédant un théorème d'addition analogue à celui du sin, et cos, sont, au fond, identiques à ces fonctions. La démonstration d'Osgood n'est pas très simple et conduit finalement à l'équation différentielle $y'' + y = 0$. La démonstration peut être simplifiée et comme l'exposé suivant ne suppose rien de l'analyse supérieure, cette détermination des fonctions trigonométriques par une équation fonctionnelle pourrait être accessible à l'enseignement secondaire (dans un exposé un peu serré).

Osgood établit d'une façon élémentaire, au début de son exposé, que la continuité en un point entraîne la continuité en tout point. Nous ferons donc à priori les hypothèses suivantes, qui n'impliquent aucune restriction.

---

[1] *Lehrbuch der Funktionentheorie,* tome I, page 510 et suivantes.

Soient $S(x)$ et $C(x)$ 2 fonctions définies et continues, satisfaisant aux équations fonctionnelles :

$$(1) \qquad \begin{cases} S(x+y) = S(x) \cdot C(y) + C(x) \cdot S(y) \\ C(x+y) = C(x) \cdot C(y) - S(x) \cdot S(y) \end{cases}$$

$$(2) \qquad S(-x) = -S(x) \ , \qquad C(-x) = C(x) \ .$$

De (2) résulte pour $x = 0$

$$(3) \qquad S(0) = 0 \ .$$

D'où, d'après (1)

$$C(0) = C^2(0) \ ;$$

on aura donc soit

$$C(0) = 0 \qquad \text{ou} \qquad C(0) = 1 \ .$$

La 1re valeur donne, en faisant $y = 0$ dans (1) comme solution du problème

$$S(x) = 0 \ , \qquad C(x) = 0 \ .$$

Nous ne considérerons donc dans la suite que le cas

$$(4) \qquad C(0) = 1 \ .$$

De la 2me équation (1) résulte, pour $y = -x$, et d'après (2)

$$(5) \qquad 1 = C^2(x) + S^2(x) \ .$$

Les valeurs des fonctions sont donc comprises entre -1 et $+1$.

On déduit, ensuite, exactement comme en trigonométrie les formules

$$(6) \qquad 2C^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 + C(x) \qquad \text{et} \qquad 2S^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1 - C(x) \ .$$

Si $x = p$ est un zéro de $S(x)$, $x = np$ est aussi un zéro ; car de (1) résulte pour $y = p$ et $x = p, 2p, 3p, \ldots$ successivement :

$$S(2p) = 0 \qquad S(3p) = 0, \ldots \qquad S(np) = 0, \ldots$$

On peut donc déterminer un intervalle $0 < x \leqq \varepsilon$, ne renfermant aucun zéro ; car, sinon, ε étant pris aussi petit qu'on le désire, les zéros de $S(x)$ s'accumuleraient partout et $S(x)$ serait identiquement 0[1].

[1] La marche suivie jusqu'ici est aussi celle d'Osgood.

A cause de la continuité, le signe de $S(x)$ reste constant dans l'intervalle.

De plus, à cause de (4) et de la continuité de $C(x)$, on peut choisir ε suffisamment petit pour que $C(x)$ reste toujours positif dans l'intervalle.

Soit a un point quelconque de l'intervalle $S(a)$ la valeur correspondante de $S(x)$.

Puisque $| S(a) | < 1$, on peut déterminer un angle α, $-\frac{\pi}{2} < \alpha < +\frac{\pi}{2}$, tel que

$$S(a) = \sin \alpha .$$

D'après (5), et puisque $C(a) > 0$,

$$C(a) = + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \cos \alpha .$$

De (6) résulte, puisque $S(x)$ conserve dans tout l'intervalle le signe de $\sin \alpha$ et que $C(x)$ reste positif,

$$S\left(\frac{a}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} = + \sin \frac{\alpha}{2} ,$$

et, par répétition, pour un entier positif

$$S\left(\frac{a}{2^m}\right) = \sin\left(\frac{\alpha}{2^m}\right) \quad \text{et également} \quad C\left(\frac{a}{2^m}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2^m}\right) .$$

Si l'on emploie successivement les équations (1) pour

$$y = \frac{a}{2^m} , \qquad x = \frac{a}{2^m} , \quad \frac{2a}{2^m} , \ \ldots \quad \frac{(n-1)\,a}{2^m} ,$$

on obtient

$$S\left(\frac{n}{2^m}\, a\right) = \sin\left(\frac{n}{2^m}\, \alpha\right) \qquad C\left(\frac{n}{2^m}\, a\right) = \cos\left(\frac{n}{2^m}\, \alpha\right)$$

Les points $\frac{n}{2^m}$ sont partout denses. A cause de la continuité, on a donc pour tout p positif,

$$S(p \,.\, a) = \sin (p \,.\, \alpha) , \qquad C(p \,.\, a) = \cos (p\, \alpha) ,$$

et comme les fonctions $S(x)$ et $\sin(x)$, $C(x)$ et $\cos(x)$ sont en même temps paires ou impaires, les relations sont vraies encore si p est négatif.

En faisant enfin

$$pa = x \; , \qquad \frac{\alpha}{a} = \mu$$

on a, pour tout x,

$$(7) \qquad S(x) = \sin(\mu x) \qquad C(x) = \cos(\mu x) \; .$$

Une vérification montre que cette forme des fonctions cherchées est non seulement nécessaire, mais encore que toute valeur de μ fournit une solution.

La méthode s'applique aussi à la fonction tg (x).

H. Schuepp (Zurich).

(Traduction de M. F. Lévy, Genève.)

NOUVEAU PROCÉDÉ
POUR LE
DÉVELOPPEMENT DES FRACTIONS DÉCIMALES PÉRIODIQUES SIMPLES

I. — On sait qu'une fraction proprement dite $\frac{R_0}{N}$ à dénominateur N premier relativement à 10, fournit un développement décimal purement périodique. On l'obtient par division décimale de R_0 par N. Nous indiquons, dans ce qui suit, un procédé beaucoup plus simple, qui n'a pas été signalé jusqu'ici, bien qu'il soit élémentaire. Il s'appuie uniquement sur l'addition et la multiplication, il est donc, quant au degré des opérations utilisées, plus simple que le procédé habituel.

Nous supposons le dénominateur N de la forme $10m - 1$, ceci sans nuire à la généralité, car dans les 3 autres possibilités $10m + 1$, $10m + 3$, $10m - 3$, on peut passer à la forme choisie, en multipliant haut et bas par 9, 3 ou 7.

Les équations suivantes traduisent le procédé usité par division :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{ll} 10R_0 & = N \cdot y_1 + R_1 \; , \\ 10R_1 & = N \cdot y_2 + R_2 \; , \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 10R_{k-1} & = N \cdot y_k + R_k \; , \end{array} \right. \qquad k = (1, 2, 3 \; . \;)$$