MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **14 (1912)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Une démonstration vectorielle du théorème de Dupin[1].

Trois surfaces S_1, S_2, S_3 respectivement définies par

$$u = \text{const.} \,, \qquad v = \text{const.} \,, \qquad w = \text{const.} \,,$$

se rencontrent orthogonalement en un point P. Soient n_1, n_2, n_3 trois vecteurs parallèles aux normales en P aux trois surfaces et par conséquent parallèles aux tangentes aux courbes d'intersection de ces mêmes surfaces. Ces vecteurs sont donc parallèles à $\frac{\partial P}{\partial u}$, $\frac{\partial P}{\partial v}$, $\frac{\partial P}{\partial w}$. Les conditions d'orthogonalité nous donnent

$$\frac{\partial P}{\partial v} \times \frac{\partial P}{\partial w} = \frac{\partial P}{\partial w} \times \frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial P}{\partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v} = 0 \,.$$

En dérivant la première par rapport à u, etc., on déduit aussi

$$\frac{\partial^2 P}{\partial v \partial w} \times \frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial^2 P}{\partial w \partial u} \times \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial^2 P}{\partial u \partial v} \times \frac{\partial P}{\partial w} = 0 \,.$$

Supposons que l'on ait fait

$$n_1 = \frac{\partial P}{\partial v} \wedge \frac{\partial P}{\partial w} \,; \qquad n_2 = \frac{\partial P}{\partial w} \wedge \frac{\partial P}{\partial u}$$

et que le point P se déplace sur la courbe intersection des deux surfaces S_1, S_2 sur laquelle seulement w est variable; c'est-à-dire supposons que dP soit parallèle à $n_1 \wedge n_2$. Alors on déduira aisément que

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial v \partial w} \wedge \frac{\partial P}{\partial w}\right) \times \left(\frac{\partial P}{\partial w} \wedge \frac{\partial P}{\partial u}\right) = 0 \,,$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v} \wedge \frac{\partial^2 P}{\partial w^2}\right) \times \left(\frac{\partial P}{\partial w} \wedge \frac{\partial P}{\partial u}\right) = 0 \,,$$

et, par conséquent,

$$n_2 \times dn_1 = 0 \,.$$

On a aussi donc

$$(n_1 \wedge n_2) \times (n_1 \wedge dn_1) = 0 \,,$$

c'est-à-dire[2]

$$dP \times n_1 \wedge dn_1 = 0 \,.$$

Donc *la courbe considérée est une ligne de courbure pour la surface* S_1.

Naples, mai 1911. R. MARCOLONGO.

[1] Voir aussi FEHR, Application de la méthode vectorielle de Grassmann à la Géométrie infinitésimale, p. 74-76.

[2] *Eléments de Calcul vectoriel* par C. BURALI-FORTI et R. MARCOLONGO, Paris, Hermann, 1910; p. 96.