SUR LE MOMENT MAGNÉTIQUE A PROPOS DES DEUX SIGNIFICATIONS DU TERME DE MOMENT DANS LA MÉCANIQUE ET SUR LES CENTRES DE GRAVITÉ MAGNÉTIQUES

Autor(en): **de la Rive, L.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1910)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-12776

On verrait enfin que l'on peut aussi définir la métrique en fonction de l'un des groupes de transformations qui lui sont associés.

Une métrique peut donc être définie de trois manières différentes, savoir : au moyen d'une *relation d'égalité* applicable aux segments et pouvant être déterminée, dans le cas des continus, par une fonction numérique de deux éléments, au moyen d'une *opération d'addition* définie pour les segments, enfin au moyen d'un *groupe de transformations* se rapportant aux éléments mêmes de l'ensemble ordonné primitif. Ces trois points de vue se complètent l'un l'autre et les trois modes de définition peuvent trouver des applications dans le domaine physique.

On examinera dans un prochain article de quelle manière doit être généralisée la notion de mesure pour pouvoir s'appliquer aux continus à plusieurs dimensions.

G. COMBEBIAC (Montauban).

SUR LE MOMENT MAGNÉTIQUE

A PROPOS DES DEUX SIGNIFICATIONS DU TERME DE MOMENT DANS LA MÉCANIQUE

ET SUR LES CENTRES DE GRAVITÉ MAGNÉTIQUES

I. — Centre de gravité et équilibre d'un corps pesant tournant autour d'un point fixe. — Rappelons que dans la théorie des forces parallèles, on appelle *moment d'une force par rapport à un plan* le produit de la force par la distance de son point d'application au plan, et qu'on démontre que le moment de la résultante est égal à la somme des moments des composantes. Etant donnée une force de direction constante et proportionnelle à l'élément de masse, telle que la pesanteur, et un système d'axes rectangulaires dont l'origine est choisie arbitrairement, on détermine la position du centre de gravité, c'est-à-dire du point d'application de la résultante par les équations

$$(1) \qquad x_1 = \frac{\Sigma mx}{\Sigma m}, \quad y_1 = \frac{\Sigma my}{\Sigma m}, \quad z_1 = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m},$$

m étant l'élément de masse dont les coordonnées sont x, y, z. Désignons par α, β, γ, les numérateurs des seconds membres ; on voit que ce sont les moments du corps par rapport aux plans coordonnés. Il est aisé de montrer que ce sont aussi les trois projections sur les axes d'un vecteur qui a pour direction la droite joignant l'origine au centre de gravité et pour valeur le produit de la longueur de cette droite par la masse totale du corps. En effet, considérons un plan passant par l'origine et dont la normale fait avec les axes les angles λ, μ, ν ; la distance d'un point x, y, z à ce plan est

$$x \cos\lambda + y \cos\mu + z \cos\nu$$

et, par conséquent, le moment du corps par rapport à ce plan est

$$\cos\lambda\Sigma mx + \cos\mu\Sigma my + \cos\nu\Sigma mz ,$$

expression qui est la somme des projections sur cette normale des moments α, β, γ pris respectivement sur les axes, et par conséquent aussi la projection de la résultante de α, β, γ, qui a pour valeur

$$\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

et dont les cosinus directeurs sont

$$\frac{\alpha}{\delta}, \quad \frac{\beta}{\delta}, \quad \frac{\gamma}{\delta}, \quad \text{ou d'après (1)} \quad \frac{x_1}{l}, \quad \frac{y_1}{l}, \quad \frac{z_1}{l}$$

en faisant

$$l = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

et l'on a en outre, comme on l'a dit ci-dessus, $\delta = \Sigma lm$. C'est le moment de masse du corps par rapport à un plan normal à la droite l.

Jusqu'ici il n'est pas question d'un moment de rotation et c'est en établissant les conditions d'équilibre d'un corps pesant mobile autour de l'origine que la seconde signification du terme intervient. Rappelons que *le moment d'une force par rapport à un axe de rotation est le produit de la projection de la force sur un plan normal à l'axe par la distance du point d'application à l'axe.* On démontre que le travail élémentaire, dû à une rotation autour de l'axe, est proportionnel au moment, et il en résulte que les équations d'équilibre du corps mobile autour de l'origine sont les suivantes

$$\beta Z - \gamma Y = 0 \ , \quad \gamma X - \alpha Z = 0 \ , \quad \alpha Y - \beta X = 0 \ , \tag{2}$$

dans lesquelles α, β, γ, ont la même signification que ci-dessus et X, Y, Z, sont les composantes de la force F rapportée à l'unité de masse. Ces équations impliquent celles que l'on obtient en remplaçant α, β, γ, par x_1, y_1, z_1 et celles-ci sont équivalentes aux suivantes

$$\frac{x_1}{X} = \frac{y_1}{Y} = \frac{z_1}{Z} = \frac{l}{F} \ .$$

La condition d'équilibre est que la droite qui joint le centre de gravité à l'origine soit parallèle à la force.

Lorsque la condition n'est pas satisfaite, la force exerce une action rotative et le moment est la résultante des trois moments exprimés par les premiers membres des (2). Or ces trois doubles produits sont les projections sur les axes du produit vectoriel de la force F et du moment δ, d'où résulte que ce vecteur est normal au plan de F et de δ et qu'il a pour valeur

$$F \ . \ \delta \ . \ \sin (F\delta) \ .$$

Si l'on suppose que F et sin $(F\delta)$ soient variables, le facteur δ est l'élément constant qui ne dépend que du corps et du point fixe et qui devient le moment de rotation si l'on suppose F égal à l'unité et que l'angle de F et de l soit droit. C'est ainsi que la quantité δ en gardant sa valeur numérique devient assimilable à un moment de rotation, mais il faut observer que la direction du vecteur δ est la même que celle de l, tandis que la direction du vecteur, moment de rotation, est normale à l et à F. Pour éviter la confusion, il serait préférable de désigner δ par *moment de masse* et d'appeler *moment de rotation disponible* la quantité (δ).

II. — **Centres de gravité magnétiques.** — L'action d'une force magnétique sur un aimant diffère, comme on va le voir, de celle que nous venons d'étudier par le fait que la masse magnétique est réductible à deux centres de gravité donnant lieu à un couple de rotation, de telle sorte qu'il n'y a pas lieu de considérer un point fixe autour duquel le corps peut tourner.

Nous admettons que dans chaque élément de volume, il se trouve deux masses magnétiques égales, $-\mu_1$ et μ_2, la première négative, la seconde positive. Considérons toutes les masses élémentaires en valeur absolue, abstraction faite de leur signe et désignons les par μ' de telle sorte que, numériquement,

$$\mu' = \mu_1 + \mu_2 = 2\mu_1 = 2\mu_2 \ , \tag{3}$$

et appliquons leur la règle pour trouver le centre de gravité.

On a pour les coordonnées du centre magnétique absolu

$$x' = \frac{\Sigma\mu' x}{\Sigma\mu} \ , \quad y' = \frac{\Sigma\mu' y'}{\Sigma\mu'} \ , \quad z' = \frac{\Sigma\mu' z}{\Sigma\mu'} \ . \tag{4}$$

Soient x_1 et x_2 les valeurs de x pour les masses μ_1 et μ_2 correspondant à μ' ; nous admettons que

$$x' = \frac{x_1 + x_2}{2} \ , \quad y' = \frac{y_1 + y_2}{2} \ , \quad z' = \frac{z_1 + z_2}{2} \ , \tag{5}$$

$$x_2 = x_1 + dl \cos\lambda \ , \ y_2 = y_1 + dl \cos\mu \ , \ z_2 = z_1 + dl \cos\nu \ , \tag{6}$$

dl est la distance élémentaire constante des deux masses μ_1 et μ_2 et λ, μ, ν sont les angles avec les axes de la direction de l'aimantation et sont variables.

Déterminons de même le centre de gravité magnétique négatif et le centre de gravité magnétique positif ; on a

$$x'_1 = \frac{\Sigma\mu_1 x_1}{\Sigma\mu_1} \ , \qquad x'_2 = \frac{\Sigma\pi_2 x_2}{\Sigma\mu_2} \ , \tag{7}$$

et ces mêmes équations pour les autres coordonnées. En tenant compte de (3), de (5) et de (6), les (4) deviennent

$$x' = \frac{2\Sigma\mu_1 x_1 + \Sigma\mu_1 dl \cos\lambda}{2\Sigma\mu_1}$$

et, d'autre part, à cause de (6), (7) donne

$$x_2' - x_1' = \frac{\Sigma\mu_1 dl \cos\lambda}{\Sigma\mu_1} \tag{8}$$

il résulte de ces deux dernières équations

$$x' = x_1' + \frac{x_2' - x_1'}{2} = \frac{x_1' + x_2'}{2}, \quad y' = \frac{y_1' + y_2'}{2}, \quad z' = \frac{z_1' + z_2'}{2}. \tag{9}$$

Les deux centres, positif et négatif se trouvent sur une droite passant par le centre absolu, de part et d'autre et à égales distances de ce centre.

Assimilons la masse magnétique absolue à la masse matérielle d'un corps ayant ce même volume. La densité sera une fonction de x, y, z, qui est l'aimantation du corps aimanté au point considéré et le centre de gravité pourra être déterminé par des intégrales de volume. Puisque, pour chaque élément de volume, en supposant un champ magnétique uniforme, les deux forces agissant sur les masses μ_1 et μ_2 peuvent être tansportées au centre $\frac{x_1 + x_2}{2}$ en laissant un couple élémentaire, c'est au centre absolu que la résultante totale s'applique, mais cette résultante est nulle.

Quant à l'action rotative, les équations (2) sont applicables à la force magnétique supposée proportionnelle à la masse magnétique, à cette différence près qu'il faut tenir compte du signe des masses μ_1 et μ_2. En effet le moment de rotation de la force par rapport à l'axe des x est :

$$[\Sigma\mu_2 y_2 - \Sigma\mu_1 y_1]\, Z - [\Sigma\mu_2 z_2 - \Sigma\mu_1 z_1]\, Y,$$

en désignant par X, Y, Z les composantes de F suivant les directions positives des axes, car la force qui agit sur la masse $-\mu_1$ est dirigée en sens contraire de la composante Z ou Y. Il en résulte, à cause des (6) que les moments déjà désignés par α, β, γ dans (2) ont ici pour valeur

$$\Sigma(\mu_2 x_2 - \mu_1 x_1), \quad \Sigma(\mu_2 y_2 - \mu_1 y_1), \quad \Sigma(\mu_2 z_2 - \mu_1 z_1),$$

expressions qu'on peut désigner par moments de magnétisme par analogie avec moments de masse, mais qu'il n'y a pas lieu de prendre par rapport à une origine arbitraire, car ces expressions se mettent, à cause de (6), sous la forme :

$$\Sigma\mu\, dl \cos\lambda = (x_2' - x_1')\, \Sigma\mu_1 \ . \tag{10}$$

On a donc, en gardant pour δ le sens qui lui a été attribué et qui devient la longueur de la droite qui joint les deux centres de gravité, multipliée par la masse totale positive

$$\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \ .$$

C'est le moment de masse magnétique par rapport à un plan normal à la droite qui joint les deux centres de gravité magnétiques.

On voit ainsi que le vecteur δ est un moment dans l'acception du terme qui est relative à la composition des forces parallèles, sauf que les masses sont accouplées deux à deux égales et de signes contraires, et qu'il en résulte que ce vecteur a pour direction la droite qui joint les deux centres et pour valeur, la longueur de cette droite multipliée par la masse totale positive ou négative en valeur absolue.

Comme dans le cas du corps pesant, ce sont les équations d'équilibre rotatif qui font intervenir la notion de moment de rotation. Ces équations sont les mêmes que (2) et, en remplaçant α, β, γ, par leurs valeurs (10) conduisent à la condition d'équilibre

$$\frac{x_2' - x_1'}{X} = \frac{y_2' - y_1'}{Y} = \frac{z_2' - z_1'}{Z} \ ,$$

analogue à celle obtenue pour la pesanteur, sauf que la droite qui doit être parallèle à la force est celle qui joint les deux centres, et que par conséquent la position d'équilibre est indépendante de l'origine arbitraire. Lorsque la condition n'est pas satisfaite, le champ exerce sur l'aimant une action rotative et on peut déduire le moment résultant des trois moments α, β, γ, comme on l'a fait pour la pesanteur, ce qui donne pour le vecteur moment la valeur absolue

$$F \,.\, \delta \,.\, \sin\,(F \,.\, \delta)$$

et pour sa direction la normale à F et à δ. La même remarque relative à la signification de δ trouve ici sa place. On éviterait la confusion que peut provoquer le double sens de l'expression *moment* en désignant δ par *moment de magnétisme*, et en représentant par (δ) la quantité qu'on appellerait *moment de rotation disponible*. Il importe de remarquer aussi que tandis que pour la masse matérielle on peut mesurer séparément la masse elle-même et la distance du centre de gravité au point fixe, le moment magnétique seul, qui est le produit des deux éléments, est susceptible d'être évalué.

III. — **Aimantation uniforme et application à la sphère pleine.** — Dans le cas de l'aimantation uniforme, les quantités μ_1 et μ_2, λ, μ, ν deviennent constantes et il en résulte que les (8) donnent

$$x'_2 - x'_1 = dl \cos\lambda \qquad y'_2 - y'_1 = dl \cos\mu \qquad z'_2 - z'_1 = dl \cos\nu .$$

La distance des deux centres est dl, *distance des deux masses élémentaires et la direction de* dl *est celle de l'aimantation.*

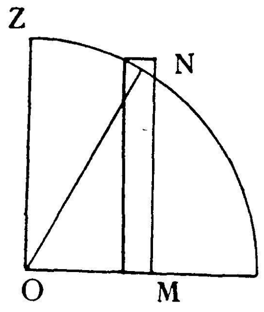
Appliquant ces considérations à la sphère, rappelons que l'aimantation uniforme satisfait dans ce cas aux équations d'équilibre magnétique intérieur exprimant l'aimantation par induction dans un champ uniforme, équations que nous ne faisons que mentionner ici. Prenons l'axe des Z parallèle à l'aimantation et l'origine au centre de la sphère ; les deux centres se trouvent sur l'axe des z et on a

$$z_2 - z_1 = dl .$$

La masse magnétique $\Sigma\mu_2$ ou $\Sigma\mu_1$ est égale au volume de la sphère multiplié par une densité hypothétique ρ, ce qui donne, en appelant a le rayon de la sphère, pour δ

$$\delta = dl\Sigma\mu_1 = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho\, dl .$$

On va voir que ρ devient une densité de surface, si la masse magnétique qui la constitue, au lieu d'agir sur un bras de levier infiniment court, agit sur un levier fini. Pour le montrer; au lieu de calculer le couple résultant en appliquant les résultantes aux centres respectifs, composons les couples élémentaires le long de chaque tube d'aimantation parallèle à OZ. Soit MN le tube de section ds pour le point de la surface N donné par l'angle ZON égal à θ et soit dl la longueur de l'aimant élémentaire. Les masses élémentaires s'annulent deux à deux et ne laissent subsister que la première en M négative et la dernière en N positive, constituant un couple dont le bras de levier est MN et la masse $\rho\, dl ds$. Pour composer les couples relatifs à tous les points M de la sphère, cherchons le centre de gravité



de la couche sphérique d'épaisseur constante dl et appliquons-y une force égale à la masse totale de la couche. Le centre se trouve sur OZ par raison de symétrie et on a

$$z_1 = \frac{\Sigma mz}{\Sigma m} .$$

Pour calculer Σmz, on a

$$z = a \cos \theta \quad \text{et} \quad m = \rho\, dl\, a^2 \sin \theta\, d\theta\, d\varphi \cos \theta ,$$

θ et φ étant les coordonnées angulaires, car on obtient, comme le montre la figure, la surface ds normale au tube MN en projetant sur le plan normal à OZ la surface élémentaire sphérique. On intègre pour la demi-sphère supérieure entre O et 2π pour φ et entre O et $\pi/2$ pour θ, ce qui donne

$$\frac{2\pi a^3}{3} \rho\, dl .$$

Pour obtenir Σm, il faut intégrer la valeur de m entre les mêmes limites et on trouve

$$\pi a^2 \rho\, dl .$$

Par conséquent

$$z_1 = \frac{2}{3} a$$

et le moment du couple résultant est

$$\frac{2}{3} a \pi a^2 \rho\, dl .$$

Pour la sphère inférieure, le couple est le même et le moment total est

$$\frac{4}{3}\, a \,.\, \pi a^2 \rho dl \,.$$

Dans cette expression ρ est la densité d'une couche dont la surface est celle du grand cercle de la sphère et dont l'épaisseur infiniment petite est la longueur de l'aimant élémentaire, tandis que le bras de levier est $^4/_3\, a$.

Comme on l'a dit plus haut, c'est le moment seul qu'on peut mesurer et c'est pourquoi le produit ρdl est la seule variable existant réellement au point de vue expérimental, bien que ρ et dl soient définis théoriquement [1].

IV. — **Aimantation non uniforme par induction dans un champ uniforme.** — Le vecteur aimantation est dans ce cas, comme on le sait, solénoïdal et il en résulte certaines conséquences relativement à la détermination du centre absolu et des centres secondaires et de la masse magnétique ou, ce qui revient au même, du moment de rotation disponible. Nous supposons connues les lignes d'aimantation, ainsi que le potentiel intérieur total V, et nous considérons les filets d'aimantation prolongés dans l'intérieur du corps entre les surfaces terminales. En un point quelconque d'un filet, le produit du vecteur par la section est constant, puisque le

[1] Si l'on cherche à se rendre compte du processus qui, dans le cas plus simple du magnétisme rémanent, transforme la somme des actions rotatives moléculaires en une action rotative sur un volume fini, c'est dans la composition des couples élémentaires que se trouve la solution. En effet, deux molécules consécutives du filet d'aimantation tendent à tourner dans le même sens et leur solidarité ne le permet pas. Une sorte de frottement intérieur magnétique ne laisse subsister que les forces extrêmes en M et en N et le couple a pour bras de levier MN. Une expérience, que je viens de réaliser au *Laboratoire de Physique de l'Université de Genève*, doit être mentionnée ici — deux rangées de petites boussoles dont la cage a 16^{mm}5 de diamètre, l'aiguille 13^{mm} de long et dont les centres sont disposés suivant une ligne droite, sont supportées horizontalement sur un disque de carton suspendu à un fil de caoutchouc d'une force de torsion très faible. En premier lieu les boussoles sont en contact de manière que chacune des deux rangées distantes l'une de l'autre de 1^{cm} occupe une longueur de 16^{cm}5. A ce degré de rapprochement les aiguilles sont solidaires et orientées suivant la ligne des centres, si le champ extérieur ne dépasse pas une certaine limite. En plaçant un barreau aimanté dans le voisinage du carton et dans son plan, symétriquement par rapport au centre, le centre du barreau qui a 32^{cm} de long se trouvant à 25^{cm} du centre du carton, les rangées s'orientent parallèlement au barreau et dans l'oscillation les aiguilles restent dirigées suivant la ligne des centres consécutifs. — En second lieu, on supprime deux boussoles dans chaque rangée et on les espace également, ce qui porte la distance de deux centres consécutifs de 16^{mm}5 à 20^{mm}6. Cette augmentation suffit pour que les aiguilles cessent d'être solidaires, que le carton ne s'oriente plus par rapport au barreau; dans les oscillations du carton, chaque aiguille reste à chaque instant parallèle au barreau. 24 décembre 1909.

vecteur est solénoïdal et ce produit a pour expression en le multipliant par k,

$$-k\frac{dV}{dl}d\sigma,$$

k étant le coefficient d'aimantation, $d\sigma$ la section du filet, et dl l'élément de longueur compté sur la ligne d'aimantation. Par définition, l'aimantation est $-k\frac{dV}{dl}$ et, d'autre part, le moment magnétique est égal à l'aimantation multipliée par le volume $d\sigma dl$; donc ce produit est égal à μ_1 en sorte que la masse magnétique est constante dans un même filet. Le centre absolu d'un filet est donc le centre de gravité de la ligne d'aimantation prise de son point d'entrée à son point de sortie du volume aimanté. On déduit de cette propriété que si le corps a un axe de symétrie parallèle au champ, ce qui donne lieu à des lignes d'aimantation symétriques par rapport à cet axe, le centre de gravité absolue sera sur cet axe puisqu'il sera le centre de gravité du système de masses dû à tous les centres des courbes qui sont elles-mêmes symétriques et les deux centres seront également sur cet axe. Si le corps a un plan de symétrie normal à son axe, le centre absolu sera dans ce plan par la même raison. L'équation (8) appliquée à un filet d'aimantation donne

$$x'_2 - x'_1 = \frac{-k\int\frac{dV}{dl}d\sigma.dx}{-k\int\frac{dV}{dl}d\sigma.dl},$$

L'intégrale au numérateur s'obtient en remarquant que, le produit $\frac{dV}{ds}d\sigma$ étant constant, on peut intégrer le facteur dx ce qui donne

$$-k\left(x_a - x_{a'}\right)\frac{dV}{dl}d\sigma,$$

x_a et $x_{a'}$ étant les valeurs de x correspondant aux extrémités du filet, et d'autre part, le produit $\frac{dV}{dl}d\sigma$ est égal à $\frac{dV}{dn}ds$ aux points x_a et $x_{a'}$ dn étant la normale à la surface du volume aimanté prise du dedans en dehors et ds l'élément de cette surface. On retrouve ainsi la réduction connue de l'intégrale de volume, relative au moment, à une intégrale de surface.

On peut se proposer de calculer l'intégrale au dénominateur de $x'_2 - x'_1$ qui est la masse magnétique totale positive ou négative. En intégrant par rapport au filet entre ses deux extrémités, on aura, comme dans ce qui précède,

$$- k \frac{dV}{dn} ds\,(l_a - l_{a'})$$

$l_a - l_{a'}$ étant la longueur du filet compris entre l'entrée et la sortie du volume aimanté, expression qu'il faudra intégrer par rapport à la surface totale du corps, et dans laquelle $l_a - l_{a'}$, est une fonction du point de la surface auquel se rapporte l'élément de surface ds.

Dans le cas de la sphère on a, θ étant l'angle du rayon vecteur avec l'axe,

$$- k \frac{dV}{dn} = \rho \cos\theta\,, \; l_a - l_{a'} = R \cos\theta, \; ds = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

et l'intégrale pour la demi-sphère est bien,

$$\frac{2\pi}{3} R^3 \rho\,.$$

L. DE LA RIVE (Genève).

PROBLÈMES RELATIFS A LA PROJECTION AZIMUTALE ÉQUIVALENTE DE LAMBERT [1]

I

La projection azimutale équivalente de Lambert, imaginée par ce dernier en 1772, trouve de plus en plus son emploi lorsqu'on se propose de représenter des portions d'une certaine étendue de la surface du globe terrestre[2].

---

[1] Les principaux résultats de ce travail ont fait l'objet d'une conférence de l'auteur, tenue le 10 octobre 1909, à la Société suisse des Professeurs de mathématiques.

[2] Voir *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, Bd. VI, 1, A.

LAMBERT, *Beiträge zum Gebrauche der Mathematik*. III. Teil, p. 105, Berlin, 1772.

BRANDENBERGER, *Ueber Lamberts flächentreue Azimutalprojektion*. (*Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft* Zürich, *Jahrg*. 54, *S*. 436-448, 1909.)