

# CONSTRUCTIONS DE PLANIMÉTRIE SOLUTIONS NOUVELLES DE PROBLÈMES COMPLIQUÉS PAR DES CONDITIONS PARTICULIÈRES

Autor(en): **Redl, Franz**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **12 (1910)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-12785>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

ystème décimal, on en avait comparé les qualités avec celles d'autres systèmes. Les considérations que nous faisons valoir dans cette étude permettent d'entrevoir l'immensité de la perte de temps et d'efforts causée à l'humanité civilisée, par le fait qu'on n'a pas choisi la meilleure base possible pour le système de numération.

Nous avons voulu donner un exemple montrant qu'on a souvent raison de ne pas accepter aveuglément les traditions du bon vieux temps, que tout n'est pas bon dans ce que nous a légué un passé lointain.

L. Gustave DU PASQUIER (Zurich).

---

## CONSTRUCTIONS DE PLANIMÉTRIE

SOLUTIONS NOUVELLES DE PROBLÈMES COMPLICQUÉS PAR DES  
CONDITIONS PARTICULIÈRES

---

Les solutions géométriques peuvent être jugées à des points de vue bien différents :

Tandis que le *professeur* s'inquiète de la valeur pédagogique, de la clarté et de la simplicité ; — le *dessinateur* pratique, préfère la rapidité, l'exactitude et la facilité d'assimilation ; — le *savant* considère l'importance que la construction peut avoir pour la théorie, il recherche des affinités organiques, il examine quels services peuvent rendre divers instruments et se propose, comme en géométrie graphique, d'atteindre économiquement le résultat par un minimum de lignes auxiliaires.

On ne saurait exiger de toute solution qu'elle soit également satisfaisante à des points de vue aussi différents, quelquefois même opposés. Mais certains problèmes, pour ne pas donner cette triple satisfaction, n'en présentent pas moins un triple intérêt ; tels sont, croyons-nous, ceux qui sont traités ci-dessous.

En présentant ce matériel, que nous croyons absolument neuf, nous n'avons pas l'intention de comparer les jugements portés à différents points de vue sur quelques constructions, mais nous espérons procurer aux mathématiques scolaires la matière d'exercices simples, faciles à saisir et à exécuter. Telle de nos solutions pourra être utile au constructeur, et peut-être, enfin, ne sera pas sans intérêt au point de vue scientifique.

On trouvera une certaine cohésion logique qui ne se rencontre pas par hasard.

Nous espérons montrer qu'en Géométrie il ne s'agit pas de mémorisation formaliste, mais que toute construction donne à l'élève l'occasion de faire travailler son talent inventif; et ce n'est qu'ainsi que le savoir se transforme en activité, développe l'esprit.

Nous voudrions montrer à l'élève que les mathématiques ne sont pas un instrument de martyr (comme l'affirment ses détracteurs), mais, qu'au contraire, par le développement naturel et la combinaison des propriétés des figures, elles sont une source de vie attrayante et féconde. L'enseignement doit montrer aux élèves que le monde est aux audacieux.

1. — Construire la bissectrice d'un angle dont on ne peut atteindre le sommet (fig. 1).

a) Choisissons, sur les côtés  $l_1$  et  $l_2$  qui déterminent l'angle A, 2 segments égaux  $PQ'$  et  $P'Q$ , puis menons d'une part les parallèles à  $PQ$  par  $P'$  et  $Q'$ ; d'autre part les parallèles à  $P'Q'$  par  $P$  et  $Q$ .

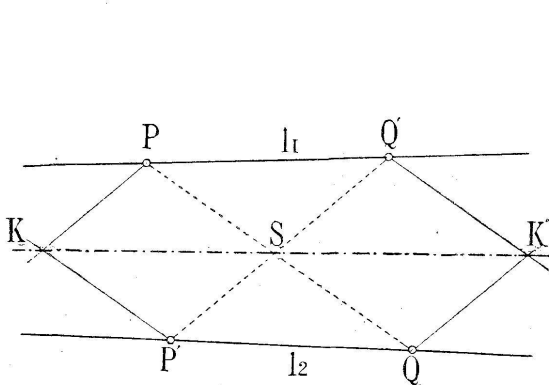


Fig. 1.

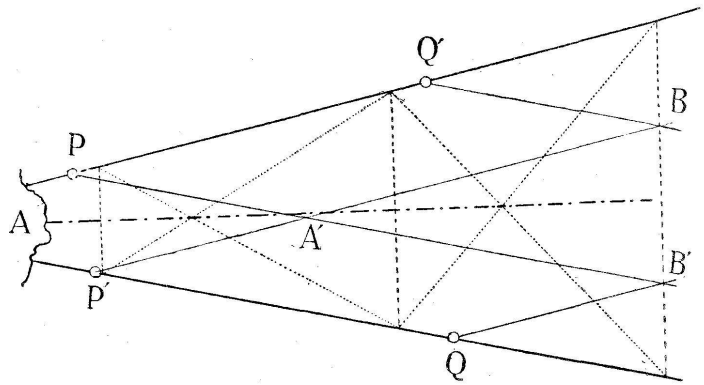


Fig. 2.

Les intersections de ces 2 paires de parallèles donnent 2 points K et K' de la bissectrice cherchée. En effet, si nous désignons par T l'intersection de  $P'K$  avec  $l_1$ , nous voyons que

$$P'Q : TP = AP' : AT ,$$

et puisque  $P'Q = PQ'$

$$PQ' : TP = AP' : AT .$$

Mais :

$$PQ' : TP = KP' : TK ,$$

done

$$AP' : AT = KP' : TK ,$$

ce qui montre que  $K$  appartient à la bissectrice cherchée, on montrerait de même que  $K'$  s'y trouve aussi.

Si  $l_1$  et  $l_2$  sont très voisins et faiblement convergents, il est préférable d'effectuer une translation d'un des côtés, puis d'appliquer la construction. En élevant ensuite 4 perpendiculaires à la bissectrice ainsi construite on obtient facilement celle que l'on cherche.

*Remarque* :  $KK'$  est l'axe perspectif des ponctuelles semblables déterminées par les segments homologues  $PQ$  et  $P'Q'$  ; et peut être construit comme tel. (Utilisé dans la fig. 4.)

PROBLÈME INVERSE. — Connaissant la bissectrice d'un angle, reporter sur les côtés deux segments égaux à partir de deux points donnés, dans le même sens, ou en sens inverse ; en construisant des parallèles seulement.

Soit par exemple à reporter  $PQ'$  à partir de  $Q$  dans le sens du sommet.

Il suffit de mener par  $Q'$  une parallèle à  $PQ$  jusqu'à son intersection  $K'$  avec la bissectrice, puis une nouvelle parallèle à  $K'Q$  par  $Q'$  ; cette dernière coupera le côté  $AQ$  au point cherché  $P'$ .

Si l'on se proposait de reporter  $PQ'$  en sens inverse sur  $P'Q$  on utiliserait le point  $K$  comme nous venons d'utiliser  $K'$  ; — les points  $P$  et  $P'$  joueraient alors le même rôle que  $Q'$  et  $Q$ .

*b)* Une construction connue, mais difficilement applicable dans le cas de petits angles, consiste à mener à l'intérieur de l'angle une parallèle quelconque à chaque côté, la bissectrice de leur angle partage la diagonale du parallélogramme en 2 segments qu'on intervertit. Par le point ainsi obtenu on mène une parallèle à la bissectrice auxiliaire, ce sera la bissectrice cherchée.

On peut modifier cette construction :

Mener à chaque côté une paire de parallèles qui interceptent sur les côtés des segments égaux  $PQ'$  et  $P'Q$ . On obtient ainsi un losange  $A'A''BB'$  dont une diagonale  $BB'$  est perpendiculaire à la bissectrice cherchée, tandis que l'autre  $A'A''$  lui est parallèle (fig. 2).

Au lieu d'intervertir les segments déterminés sur  $PP'$  et  $QQ'$ , on peut mener 2 parallèles à  $BB'$  et déterminer 2 points de la bissectrice comme le montre la fig. 2.

Pour rendre ce deuxième procédé applicable aux petits angles, nous déterminerons  $A'A''$  comme suit : par rapport au milieu de  $PP'$ , le point  $S$  dans la fig. 1 est symétrique de  $K$  et dans la fig. 2  $A'$  est symétrique de  $A$ .

Si dans la fig. 2 nous dessinons le point  $S$  d'intersection de  $PQ$  et de  $P'Q'$  ainsi que le point  $K$  de la bissectrice (fig. 1) nous aurions  $SA' =$  et  $\parallel KA$  et ces 2 segments sont équidistants du milieu de  $PP'$  ; d'où nous déduisons facilement que  $SA'$  est bissectrice des angles  $PA'P'$  et  $QA''Q'$ . (Le point  $A''$  n'est plus visible dans la figure.)

Dans la fig. 3 désignons le point  $S$  par  $S_1$  ; — pour les mêmes



raisons que  $S_1$ , les points  $S_2$  et  $S_3$  appartiennent à la bissectrice des angles  $PA'P'$  respectivement  $RA''R'$ .

La droite  $A'A''$  est ainsi déterminée d'une nouvelle manière.

Nous avons démontré du même coup que la droite de Pascal de l'hexagone  $PR'QP'RQ'$ ; — dans le cas où  $PQ = PR = P'Q' = P'R'$ ; — est parallèle à la bissectrice de l'angle  $A$ . La ligne de Pascal partage les diagonales  $PP'$ ;  $QQ'$  et  $RR'$  dans le même rapport que cette bissectrice; — les segments devant toutefois être intervertis.

La figure 3 donne un exemple de faisceaux perspectifs dont les sommets  $P$  et  $P'$  coïncident avec les points d'intersection du rayon commun et des supports  $AP$  et  $AP'$  des ponctuelles égales déterminées par les segments homologues  $PQ = P'Q'$ .

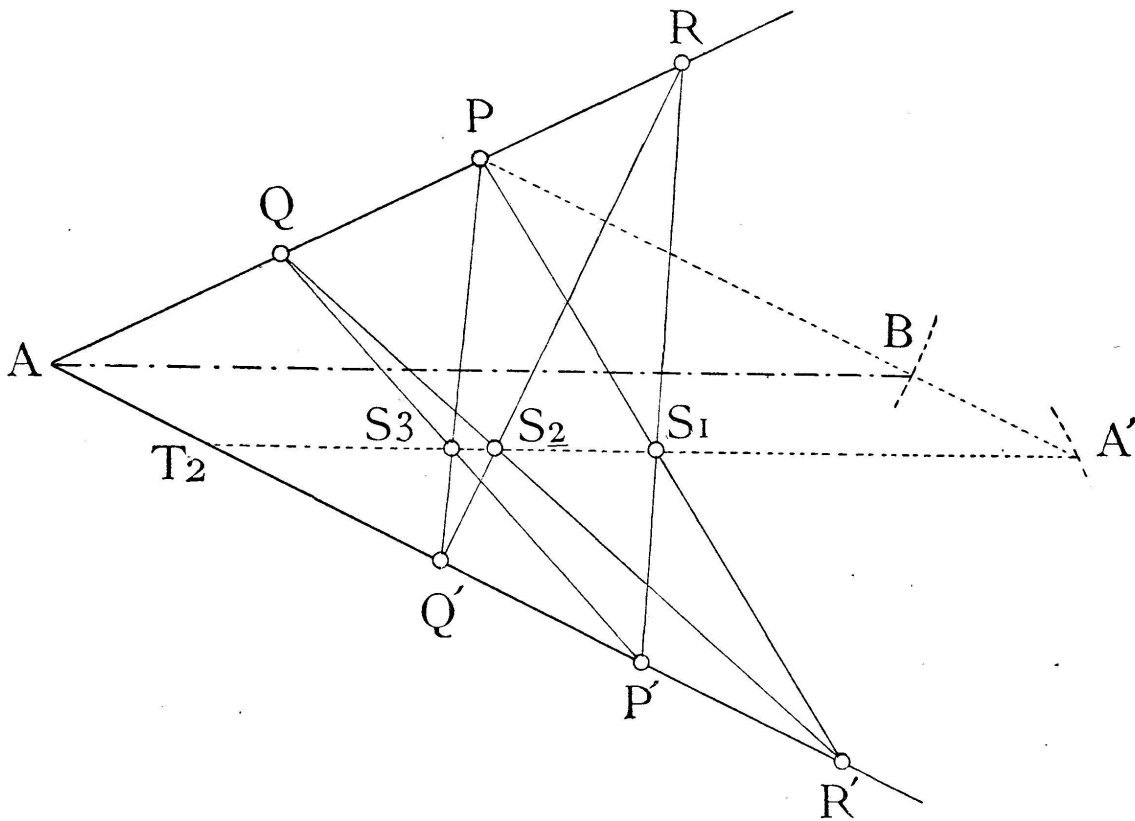


Fig. 3.

La détermination de la bissectrice, dans le cas de petits angles, sera plus exacte si on a soin de transporter les segments égaux  $PR$  et  $P'R'$  sur les côtés, à des distances égales et suffisamment grandes pour que  $S_1$  et  $S_3$  soient assez écartés.

L'emploi déjà mentionné de perpendiculaires à l'axe perspectif conduit à la bissectrice cherchée.

On pourrait éviter l'emploi de ces perpendiculaires en ne construisant pas les ponctuelles égales sur les côtés eux-mêmes, mais sur des parallèles à ces côtés, choisies de telle sorte qu'elles se

coupent dans la figure; — par exemple dans la fig. 2 sur PB' et P'B. L'axe perspectif de ces ponctuelles donne immédiatement la bissectrice de l'angle PAP'.

Les points d'intersection des côtés donnés et des parallèles auxiliaires étant des points homologues, cette simplification sera peu favorable dans le cas de petits angles.

Désignons l'intersection de l'axe perspectif  $S_1S_2S_3$  avec PP' par  $T_1$ , avec AP' par  $T_2$  et avec AP par  $T_3$ , en appliquant le théorème de Carnot à la transversale  $T_1T_2T_3$  du triangle APP', nous aurons :

$$\frac{AT_3}{PT_3} \cdot \frac{PT_1}{P'T_1} \cdot \frac{P'T_2}{AT_2} = + 1$$

d'où

$$\frac{PT_3}{P'T_2} = \frac{AT_3}{AT_2} \cdot \frac{PT_1}{P'T_1} = \frac{AP'}{AP} = \frac{PT_3}{P'A - (PT_3 - PA)} = \frac{PA + (P'A - P'T_2)}{P'T_2},$$

ce qui montre que

$$\overline{PT_3} = \overline{P'A} ; \quad \overline{P'T_2} = \overline{PA}$$

$$\overline{RT_3} = \overline{R'A} ; \quad \overline{R'T_2} = \overline{RA}$$

$$\overline{QT_3} = \overline{Q'A} ; \quad \overline{Q'T_2} = \overline{QA}$$

Que nous pouvons exprimer :

**THÉORÈME :** *La distance d'un point quelconque de l'une des ponctuelles au sommet de l'angle A est égale à la distance du point homologue de l'autre ponctuelle au point d'intersection de cette seconde ponctuelle avec l'axe perspectif.*

Cette proposition se justifie très simplement au point de vue projectif: on voit que les points des deux ponctuelles confondus en A sont les homologues de  $T_2$  et  $T_3$ . Les segments homologues  $\overline{PA}$  et  $\overline{P'T_2}$  seront donc égaux à cause de l'égalité des ponctuelles.

Les points à l'infini des deux ponctuelles étant homologues,  $PX'_\infty$  et  $P'X_\infty$  se coupent en un point A' de l'axe perspectif, donc

$$\overline{PT_3} = \overline{P'A} = \overline{A'P} .$$

La réciproque est également vraie.

Si le point  $T_2$  est situé dans les limites de la figure, on peut facilement déterminer A' à l'aide du compas; puisque  $\overline{P'A'} = \overline{AP} = \overline{T_2P'}$ , il suffira de couper l'axe perspectif par un cercle de rayon  $P'T_2$  et de centre P'. Puisque  $\overline{AP}$  est aussi égal à  $\overline{BP}$ , le point B se trouvera à l'intersection de PA' et du cercle de rayon  $P'T_2$  et de centre P.

En menant par B la parallèle à l'axe perspectif, on obtient la bissectrice de l'angle A.

Si dans la fig. 3 on mène par P une parallèle à  $RP'$  et par  $P'$  une parallèle à  $PQ'$ , elles se coupent en un point  $K_1$  de la bissectrice extérieure de l'angle  $PAP'$ .

Le point d'intersection  $\Sigma$  de  $RP'$  et de  $PQ'$  appartient à la bissectrice extérieure de l'angle  $PA'P'$ , car,  $AK_1 =$  et  $\parallel A'\Sigma$ .

Les segments  $AK_1$  et  $A'\Sigma$  sont équidistants du milieu de  $PP'$ .

$A'\Sigma$  est l'axe perspectif des ponctuelles égales déterminées sur les côtés  $AP$  et  $AP'$  par les segments  $PR = P'Q'$ .

La bissectrice extérieure de  $PAP'$  est l'axe perspectif des ponctuelles semblables caractérisées par  $RP'$  et  $Q'P$ .

Si  $A'\Sigma$  coupe  $AP$  au point  $\Delta_3$  et  $AP'$  en  $\Delta_2$  on aura, comme plus haut :

$$\overline{AP'} = \overline{PT_2} = \overline{PA'} = \overline{P\Delta_2}$$

et

$$\overline{AP} = \overline{P'T_1} = \overline{P'A'} = \overline{P'\Delta_1}$$

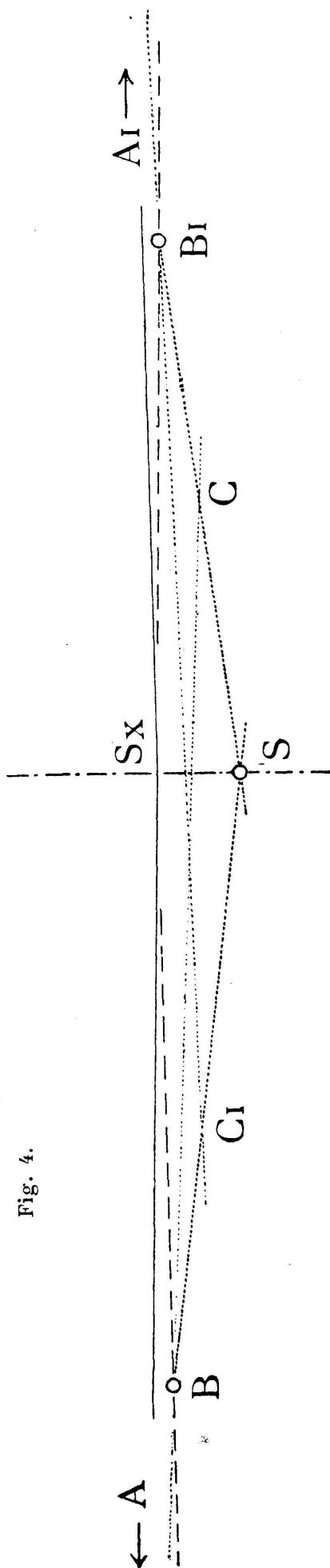
Nous ne nous occuperons pas des constructions qui résulteraient de ces relations, car elles ne nous conduiraient à rien de nouveau.

## II. — Construire la bissectrice d'angles très obtus.

**Déterminer le sommet de très petits angles.**

La détermination exacte de la bissectrice d'un angle très obtus présente des difficultés spéciales parce que le sommet en est mal déterminé. Il est impossible d'éviter absolument les causes d'erreurs. On peut y tendre en employant des règles très soigneusement vérifiées pour prolonger le plus possible les côtés — toutes les constructions devront être effectuées en traits très fins.

Fig. 4.



Proposons-nous de construire la bissectrice de l'angle  $AS_xA_1$ ; les lignes pointillées sont les prolongements des côtés. (Les points  $A$  et  $A_1$  des côtés ne sont plus visibles dans la fig. 4.)

Si  $AB_1 = A_1B$ , l'axe perspectif des ponctuelles semblables  $A, B, C, \dots$  et  $A_1, B_1, C_1, \dots$  sera la bissectrice cherchée.

L'habileté du dessinateur consistera à choisir  $C$  et  $C_1$  pour que que  $BC_1$  et  $B_1C$  ne deviennent pas trop petits et pour que, d'autre part, l'angle  $CSC_1$  ne soit pas trop obtus.

Si on le veut, on peut se contenter de déterminer un seul point de la bissectrice; il remplacera le sommet dans les constructions qui suivent.

Si l'on se propose simplement de déterminer le sommet de  $S_x$ , on peut éviter le transport des grands segments  $\overline{AB_1} = \overline{A_1B}$ ; car on obtiendra une approximation suffisante en prenant  $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$ ; le théorème de Carnot nous montre qu'alors  $AB_1$  et  $A_1B$  se trouvent égaux à très peu de chose près, — et cela d'autant mieux que les points correspondants auront été choisis symétriques par rapport à  $S_x$  autant que faire se peut. Par exemple  $AB$  égal à  $BS_x$  et  $A_1B_1$  égal à  $B_1S_x$ . Si l'on prend  $\overline{AB} = \overline{BS_x} = \overline{B_1S_x} = \overline{A_1B_1}$ , on obtient l'axe de symétrie.

L'hypothèse que  $\overline{AB} = \overline{A_1B_1}$  fait dégénérer approximativement la similitude des ponctuelles en égalité, et pour choisir  $C$  et  $C_1$  on se bornera à prendre  $BC = B_1C_1$  (voir fig. 4).

L'axe perspectif n'est plus la bissectrice, mais détermine néanmoins le sommet avec une approximation suffisante. Cette construction est certainement exacte au point de vue théorique.

### III. — Théorèmes simples sur le quadrangle plan et applications à la construction.

#### 1. — DÉMONSTRATION DES PROPRIÉTÉS.

Nous nous proposons de généraliser par la projection parallèle les propriétés des figures 1, 3 et quelques autres qui s'y rattachent immédiatement.

On sait que lors de projections parallèles, les propriétés projectives des figures, et en outre les théorèmes basés exclusivement sur le parallélisme ou sur des propriétés de parallélogrammes, subsistent.

La projection parallèle des figures 1 et 3 détruit l'égalité des segments  $PQ', P'Q$ ; — respectivement  $PQ, P'Q'$  — et l'axe perspectif des ponctuelles semblables  $PQ \dots; P'Q' \dots$ ; cesse d'être la bissectrice de l'angle  $PAP'$  (fig. 1). Les autres propriétés subsistent.

a) Lorsque la figure 1 aura été transformée par projection parallèle,  $KK'$  passera encore par le point A d'intersection de  $l_1$  et  $l_2$ .

En prolongeant  $KP$  et  $K'Q'$  d'une part,  $KP'$  et  $K'Q$  d'autre part, on forme un parallélogramme circonscrit au quadrangle  $PP'QQ'$  dont la diagonale  $KK'$  passe par A.

On peut considérer cette propriété comme cas particulier du théorème de BRIANCHON : puisque les côtés de l'hexagone  $KPQK'Q'P'K$  passent alternativement par deux points infiniment éloignés, les droites  $KK'$ ;  $PQ'$ ;  $QP'$ , de jonction des sommets opposés doivent se couper en un même point.

Si nous désignons par T le point d'intersection de  $KP'$  avec  $AP$  et par T' celui de  $K'Q'$  avec  $AP'$  les segments situés sur les parallèles  $P'T$  et  $Q'T'$  forment la proposition

$$P'K : KT = T'K' : K'Q'$$

car les rapports anharmoniques des points situés sur  $AT'$  et sur  $AQ'$  sont égaux, de même que ceux des groupes sur  $Q'T'$  et  $TP'$  pour cause de parallélisme. De cette proposition résulte le théorème en question.

On peut encore le démontrer en appliquant aux triangles homologues le théorème de DESARGUES qui dit que la deuxième diagonale du parallélogramme circonscrit cité plus haut passe par le point d'intersection de la paire de côtés opposés  $PP'$  et  $QQ'$  du quadrangle.

Les quadrangles  $PQQ'P'$  et  $PQP'Q'$  appartiennent aussi au système des quatre points  $PP'QQ'$ .

Si l'on dessine comme ci-dessus les parallélogrammes circonscrits à ces quadrangles, le théorème appliqué à ce nouveau parallélogramme nous montre que leurs diagonales passent par les points d'intersection des côtés opposés des quadrilatères correspondants.

Les six diagonales des parallélogrammes ainsi obtenues sont les axes perspectifs des ponctuelles semblables qu'on forme lorsque dans les trois quadrilatères on considère les segments de diagonales dans deux sens comme homologues. Le théorème d'Euler montre que

$$\overline{K'K}^2 = \overline{P'Q}^2 + \overline{Q'P}^2 + \overline{P'Q'}^2 + \overline{PQ}^2 - \overline{P'P}^2 - \overline{Q'Q}^2.$$

b) Imaginons que dans la figure 3 on ait dessiné comme dans la figure 1 pour les paires de points homologues  $PP'$  et  $RR'$  les points K et K' de la bissectrice de l'angle A ; en outre, qu'on ait construit pour la paire  $RR'$  le point A'' analogue de A' et qu'enfin on projette parallèlement toute la figure ; nous constatons, comme dans

la figure 2, que

$$AK = \text{et} \parallel A'S_1 \quad \text{et} \quad AK' = \text{et} \parallel A''S_1$$

d'où résulte que les six diagonales introduites sous la lettre *a*) sont égales et parallèles deux à deux.

De plus, les axes perspectifs  $AB$  et  $S_1S_2S_3$  sont équidistants aussi bien du milieu de  $PP'$  que de celui de  $RR'$ ; par suite, la droite joignant ces milieux partage aussi en deux parties égales le segment  $AS_1$ , par exemple, et l'on voit avec évidence éclatante le théorème de Gauss :

*Les milieux des trois diagonales du quadrilatère complet  $PRP'R'P$  sont en ligne droite.*

*c)* Si dans la projection parallèle de la figure 1 on prolonge les droite  $QK'$  et  $PQ'$  jusqu'à leur intersection  $X$  et de même  $Q'K'$  et  $P'Q$  jusqu'à leur intersection en  $Y$ , la droite  $XY$  sera parallèle à  $PP'$ , car

$$AK : AK' = AP : AX = AP' : AY .$$

On démontrerait de même qu'on obtient une deuxième parallèle à  $PP'$  en joignant le point  $X_1$  d'intersection de  $PQ$  avec une parallèle à  $P'Q$  passant par  $Q'$  au point d'intersection  $Y_1$  de  $P'Q'$  avec une parallèle à  $PQ'$  par  $Q$ . Ce qui nous permet de mener une parallèle à un côté d'un quadrangle complet.

*d)* Dans la projection parallèle de la figure 1, menons par  $S$  une droite quelconque qui coupe les côtés  $AP$  et  $AP'$  en  $M$  et  $M'$ ; puis par  $M'$  une parallèle à  $PQ$  et par  $M$  une parallèle à  $P'Q'$ , ces deux parallèles coupent les côtés en  $N$  et  $N'$  : *les trois points  $N$ ,  $K$  et  $N'$  sont situés en ligne droite.*

Réciproquement à une droite passant par  $K$  correspond une droite par  $S$ .

On obtiendrait d'une manière analogue une parallèle à  $NN'$  passant par le point  $K'$ .

Pour le démontrer, il suffit de considérer que les segments  $MS$  et  $M'S$  sont projetés de deux manières sur  $NN'$  par les côtés du parallélogramme  $SPKP'$  et les droites  $MN'$  et  $M'N$ .

Le parallélogramme inscrit dans le quadrangle et dont les côtés sont parallèles aux diagonales du quadrangle nous permet de construire le sixième côté dont on ne connaît pas les sommets d'un quadrangle complet déterminé par la position de cinq côtés.

*Remarque.* Le centre du parallélogramme  $PKP'S$  se trouve sur la ligne de Gauss du quadrilatère  $MNN'M'M$ .

Désignons par  $ABCDEF$  les sommets du quadrilatère complet de la figure 5.

Si  $P$  et  $P'$  divisent les côtés opposés  $DA$  et  $BC$  en segments proportionnels dirigés dans le même sens,  $PP'$  est une diagonale

d'un parallélogramme inscrit dans le quadrangle ABCD et ayant ses côtés parallèles aux diagonales AC et BD.

Fig. 6.

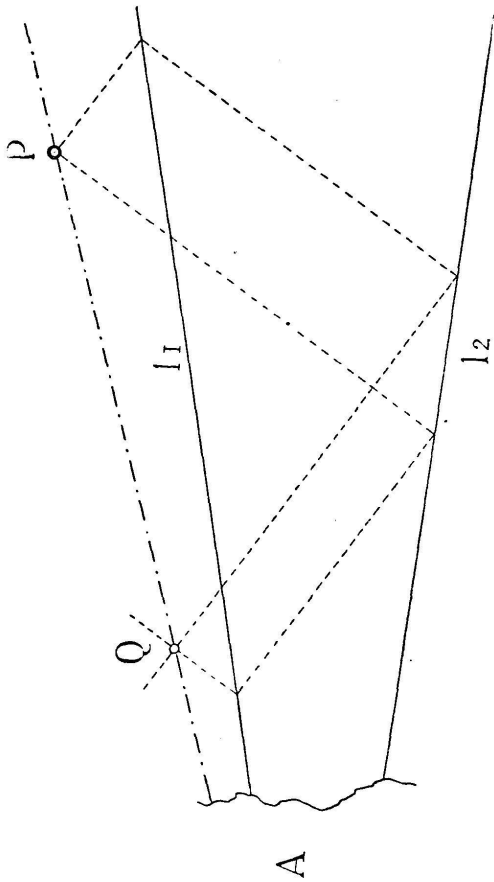


Fig. 7.

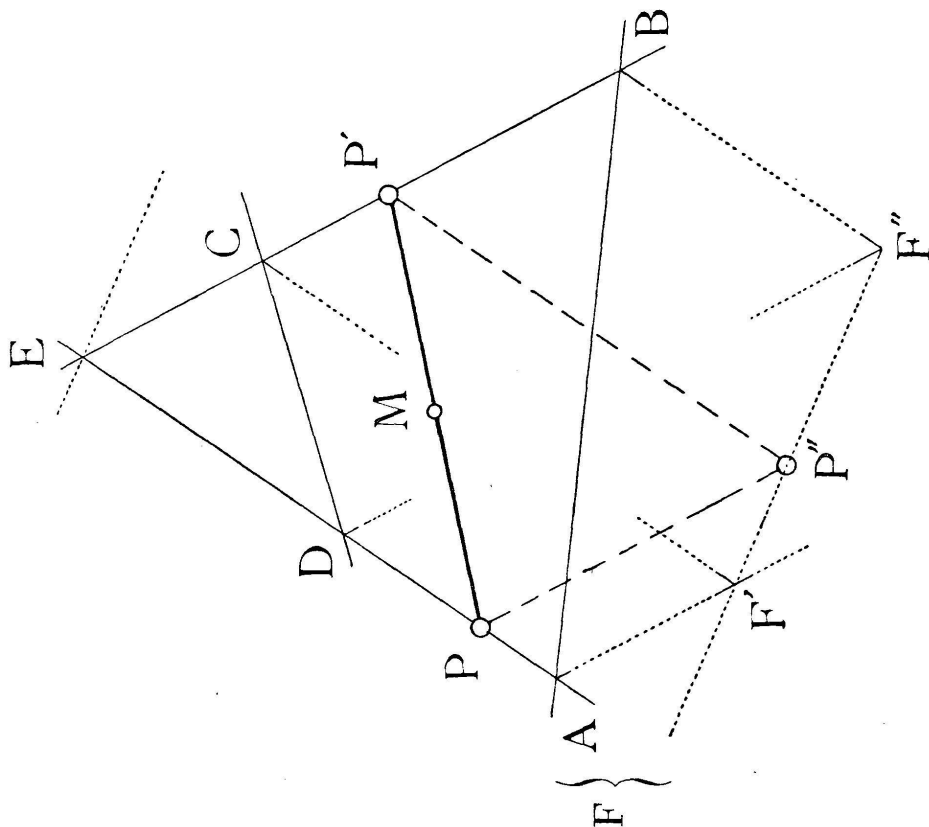
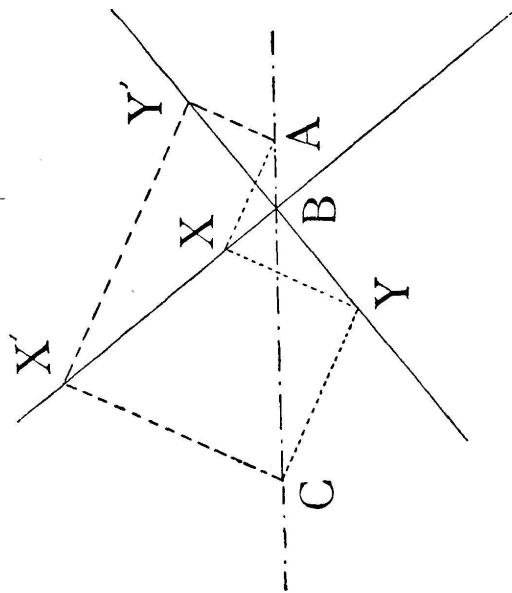


Fig. 5.

Des diagonales du parallélogramme circonscrit au quadrangle ACDB et formé des parallèles aux côtés opposés AD et BC, —



$F'F''$  est celle qui passe par le point  $F$  d'intersection des côtés opposés  $AB$  et  $CD$ . Le prolongement de la diagonale égale et parallèle  $E'E''$  du parallélogramme formé des parallèles aux côtés opposés  $AB$  et  $CD$  passe par  $E$  (voir fig. 5).

Les lignes pointillées projettent sur la diagonale  $F'F''$  les rapports égaux des segments déterminés par  $P$  et  $P'$ , donc se coupent sur cette diagonale.

On reconnaît immédiatement que le centre  $M$  du parallélogramme  $PP'EP''$ , c'est-à-dire le milieu de  $PP'$  est équidistant des droites  $EE'$  et  $FF'$  et que, — d'après ce qui précède, — il se trouve sur la droite de Gauss du quadrilatère  $ABCD$ . Les milieux des segments  $EF$ ,  $EF'$ ,  $EF''$  et  $EP''$ , c'est-à-dire les milieux de  $EF$ ,  $AC$ ,  $BD$  et  $PP'$  sont situés sur une droite.

Ce qui nous permet d'énoncer le *nouveau* théorème général :

*Si dans les 3 quadrangles simples formés des côtés d'un quadrilatère complet on considère comme segments homologues de ponctuelles projectives semblables les côtés opposés, dirigés dans le même sens, — (au contraire de ce qui se fait lors de la construction par tangentes de la parabole exinscrite au quadrilatère); — on forme 6 paires de ponctuelles dans lesquelles les milieux des segments déterminés par des paires de points correspondants sont situés sur la droite de Gauss du quadrilatère.*

Ce théorème est appliqué à la construction dans la figure 12.

*Corollaire.* La droite de Gauss du quadrangle partage les côtés opposés des trois quadrilatères en segments homologues. Elle est donc tangente aux six paraboles obtenues comme enveloppes à l'aide des six paires de ponctuelles.

## 2. APPLICATIONS DE CES PROPRIÉTÉS A LA CONSTRUCTION.

a) *Joindre un point donné  $P$  au point d'intersection  $A$  de 2 droites qui ne se coupent pas dans les limites de la figure.*

La projection parallèle de la fig. 1 donne le principe de la solution. Si le point donné est l'un des points  $K$  ou  $K'$ , la construction consiste à déterminer l'autre :

On choisira de préférence des lignes de construction rectangulaires, afin de pouvoir les tracer par simple translation d'équerre (fig. 6). Des 2 constructions possibles, on préférera celle qui se dirige vers le sommet de l'angle.

Une des plus anciennes solutions de ce problème est due à LAMBERT, mais elle devient impraticable quand le point donné est trop voisin de la bissectrice. Elle consiste à construire 2 triangles homologues dont les sommets sont 3 à 3 sur les 2 droites données; 2 côtés homologues se trouvent également sur ces droites, tandis que les deux autres paires déterminent l'axe d'homologie, c'est-à-dire la droite cherchée.



Considérons un des sommets situés sur  $l_1$  ou  $l_2$  comme point donné P qu'il s'agirait de joindre au centre d'homologie déterminé par l'intersection inaccessible de 2 droites et qu'on peut considérer comme centre de 2 ponctuelles perspectives situées sur  $l_1$  et  $l_2$ , dont l'axe coïncide avec l'axe d'homologie de la construction de Lambert. On obtient ainsi le point perspectif à P et la droite cherchée.

Cette construction est encore praticable lorsque celle de Lambert ne l'est plus, elle détermine doublement le point auxiliaire nécessaire, d'où une preuve. Le cas particulier où les supports des ponctuelles sont parallèles est résolu du même coup.

b) *Droite joignant deux points très rapprochés* (fig. 7 et 8).

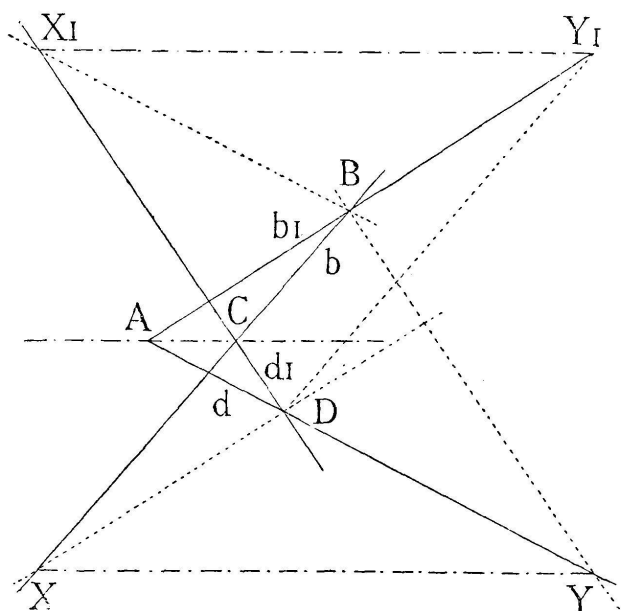


Fig. 8.

La fig. 7 montre la construction de AB à l'aide d'un point auxiliaire C.

Nous avons mené par B deux droites rectangulaires convenablement choisies ; nous imaginons que B soit déterminé par l'intersection supposée inaccessible de ces 2 droites rectangulaires et nous appliquons la construction de la fig. 6 ; c'est-à-dire que nous faisons partir de A 2 traits rectangulaires couvés en X et Y ; — Y' et X' qui se coupent en C et forment un hexagone dont B est point de Brianchon.

Dans la fig. 8, nous considérons les points voisins, C et A comme déterminés par l'intersection des droites  $bd_1$  et  $b_1d$ . En appliquant au quadrangle ABCD la construction indiquée plus haut sous la lettre c), on obtient à l'aide de 2 parallèles une droite XY ou  $X_1Y_1$  parallèle à AC.

On utilise souvent dans ce problème la configuration de Desargues, qui nécessite 2 droites de plus pour déterminer le point auxiliaire, et l'une d'elles se trouve précisément aussi mal déterminée par 2 points voisins.

c) *Joindre les points d'intersection de 2 paires de droites qui ne se coupent pas dans les limites de la figure.*

Soient  $g_1$  et  $g_2$  ;  $l_1$  et  $l_2$  les droites dont on veut joindre les points d'intersection. Dans la figure 9, nous avons appliqué 2 fois la construction de la figure 6.

Si le point F seulement était inaccessible et qu'il s'agisse de le joindre au point E, les droites  $l_1$  et  $l_2$  joueraient le rôle des lignes

brisées auxiliaires de la fig. 6 et partant de E elles déterminent un point de la droite cherchée après avoir été coudées 2 fois sur les côtés  $g_1$  et  $g_2$  suivant EBNL et EDN'L.

D'une manière analogue  $g_1$  et  $g_2$  déterminent le point G.

En vertu de ce que nous avons dit à propos de la fig. 8, il faut que LG soit parallèle à M'N' et à MN, d'où une première vérification.

On peut en introduire d'autres; en joignant le point d'intersection S de MD et de M'B à celui de N'D et de NB on obtient une parallèle à LG, et les points milieux de BD; de M'N; de N'M; de MM' et de NN' sont équidistants de ces deux droites.

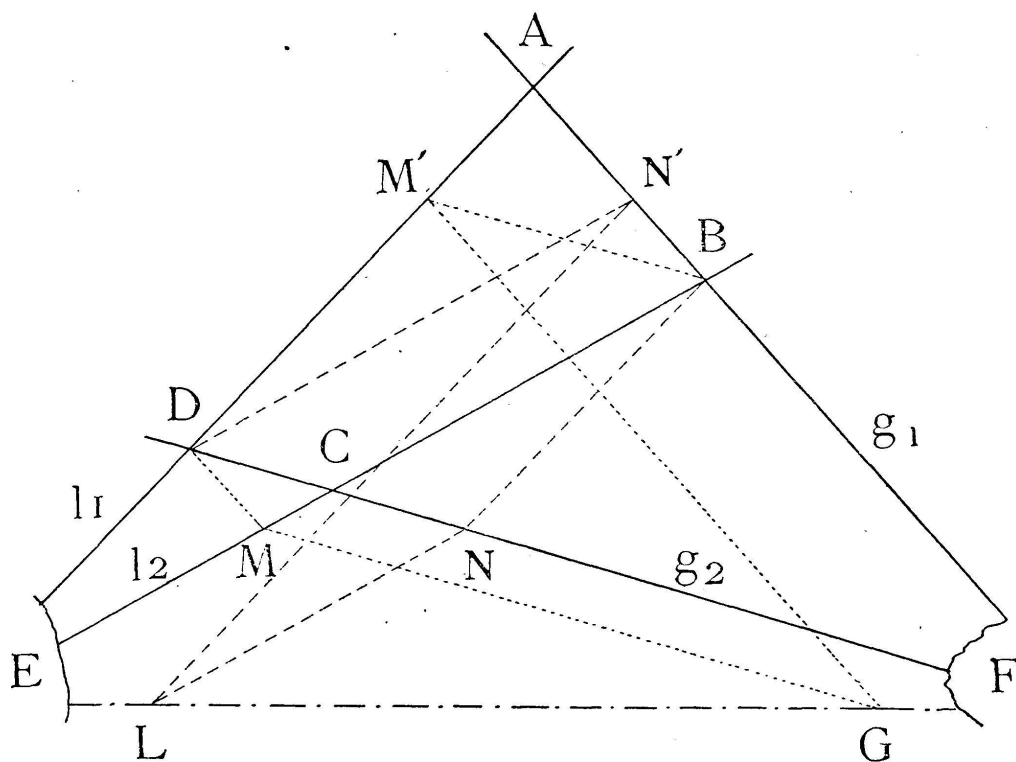


Fig. 9.

La droite joignant les milieux de DB et de MM' étant la ligne de Gauss du quadrilatère DMBM'D, elle partage en 2 parties égales la diagonale SE.

On pourrait se servir de la parallèle de vérification menée par S, pour la construction, en menant par exemple par le milieu de BD 2 droites quelconques et en utilisant l'équidistance.

On peut déterminer au moyen de parallèles seulement les points équidistants correspondants aux points d'intersection de la parallèle de vérification avec  $g_1$  et  $l_1$ .

On obtient encore une parallèle à EF en joignant le point D au point d'intersection des parallèles à  $g_2$  et  $l_2$  menées par M et M'.

La disposition défavorable des éléments donnés dans la fig. 10 ne permet pas l'application immédiate de la construction ci-des-

sus, on pourra procéder comme suit : on a considéré C comme point donné, les derniers segments des 2 lignes brisées qui devraient déterminer le point auxiliaire X de AC ont été prolongés en arrière jusqu'aux intersections  $G_1$  et  $G_2$  avec  $g_1$  et  $g_2$  pour former le parallélogramme  $G_1XG_2C$  dans lequel on voit que le milieu M de  $G_1G_2$  est un point de la droite cherchée AC.

On pourra joindre le point M à A ou à C d'après la construction de la figure 6.

Si cette construction est difficilement exécutable, on peut, comme dans la fig. 10 appliquer la construction de la fig. 8 pour déterminer à l'aide de M une parallèle PQ à AC.

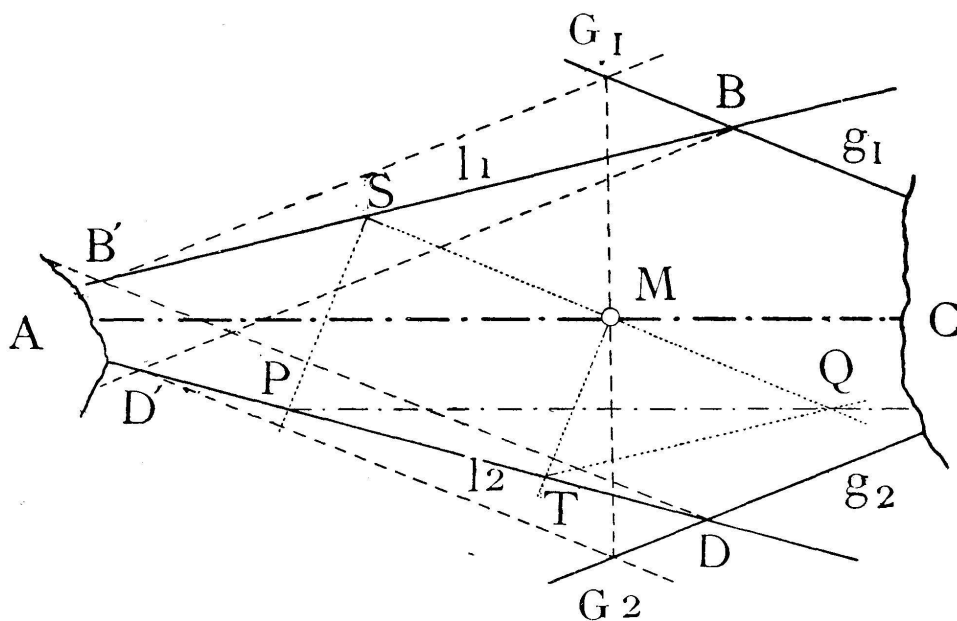


Fig. 10.

Pour cela nous menons par M 2 perpendiculaires quelconques et nous appliquons la règle énoncée plus haut sous la lettre *c*.

Cette construction est réversible, c'est-à-dire que la parallèle PQ à AC peut permettre de déterminer le milieu M de AC.

Dans la figure 11 on utilise cette construction de la parallèle, et la construction inverse pour joindre les 2 points très éloignés S et T.

Ce cas difficile est ainsi très simplement résolu dans un minimum d'espace et avec une grande exactitude, vérifiée d'ailleurs par la double disposition possible.

La construction résultant de la propriété citée au § précédent sous *c*) n'a pas été appliquée à la lettre, on a remplacé un des 2 sommets à joindre par un point de la droite qui les relie, ce qui revient évidemment au même.

Ainsi dans la figure 11, P est remplacé par  $R'$  (respectivement  $R''$ ) pour déterminer la parallèle  $Q'N'$  (respectivement  $Q''N''$ ) à ST.

On applique la construction inverse pour déterminer le point

d'intersection  $X$  de  $PQ$  et de  $ST$  en utilisant à gauche le point  $Q'$  et à droite  $Q''$ .

Remarquons la marche générale de la construction : nous avons mené successivement :  $P'Q' \parallel PQ$ ;  $Q'R' \parallel QQ''$ ;  $R'N' \parallel PP''$ ;  $QN' \parallel PP'$  et enfin  $Q'N' \parallel ST$ .

Le point cherché  $X$  est à l'intersection de  $PQ$  et de  $P'N'$ .

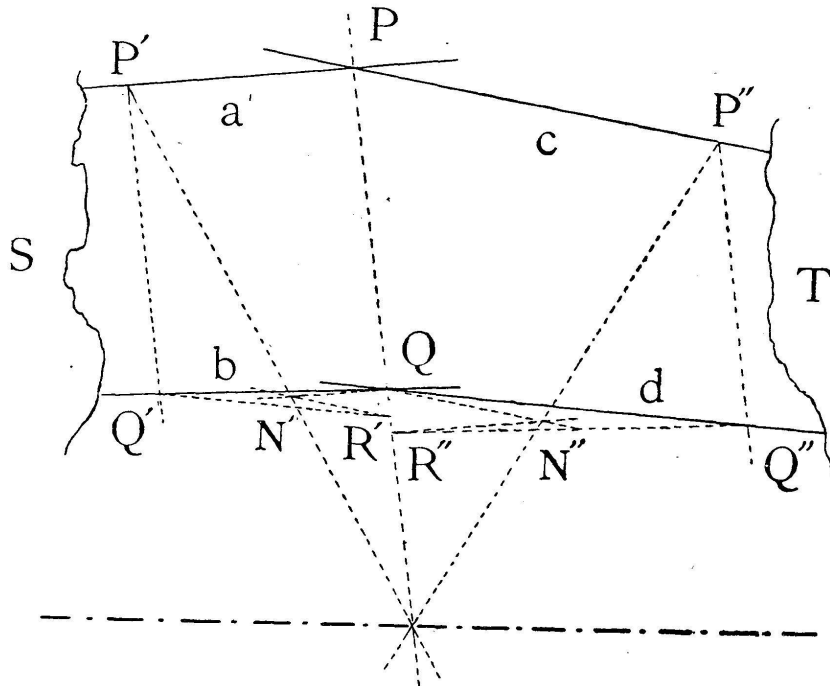


Fig. 11.

*Par le point d'intersection de deux droites qui se coupent hors des limites de la figure, mener une parallèle à une troisième droite.*

D'après ce qui précède nous pourrions résoudre le problème, c'est-à-dire déterminer un point de la parallèle cherchée à l'aide

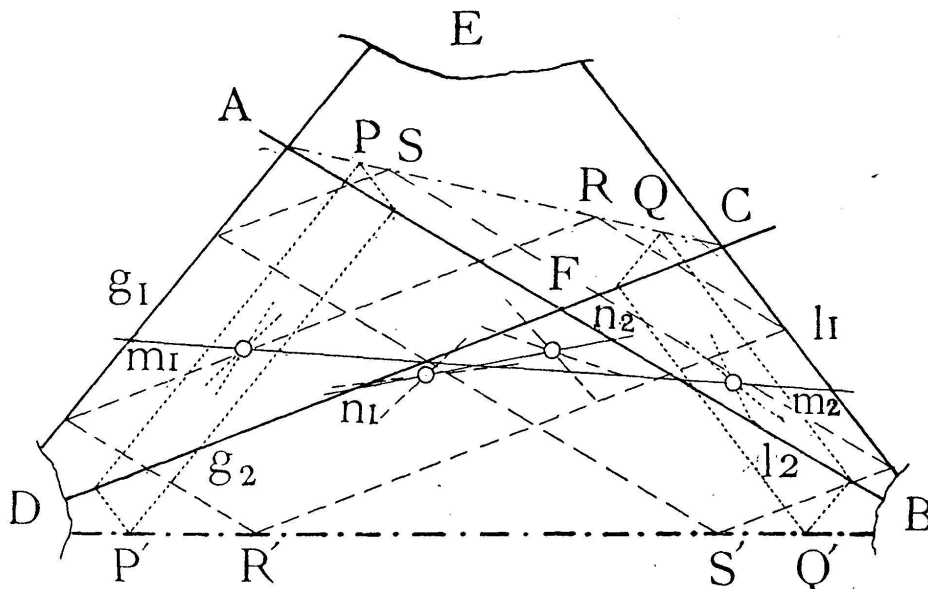


Fig. 12.

du point d'intersection de la troisième droite avec *une* des deux autres, tandis que la plupart des méthodes connues ne sont applicables que si les points d'intersection de la troisième avec les *deux* premières sont accessibles.

Dans le cas où les 2 points d'intersection se trouvent dans les limites du dessin, 2 dispositions nous seront possibles.

Le problème peut encore être résolu par application de la construction 9 dont il constitue le cas particulier où l'un des points inaccessibles est infiniment éloigné ; c'est l'autre qu'on considérera comme point donné.

Dans la figure 12 nous appliquons ce qui a été dit sous la lettre

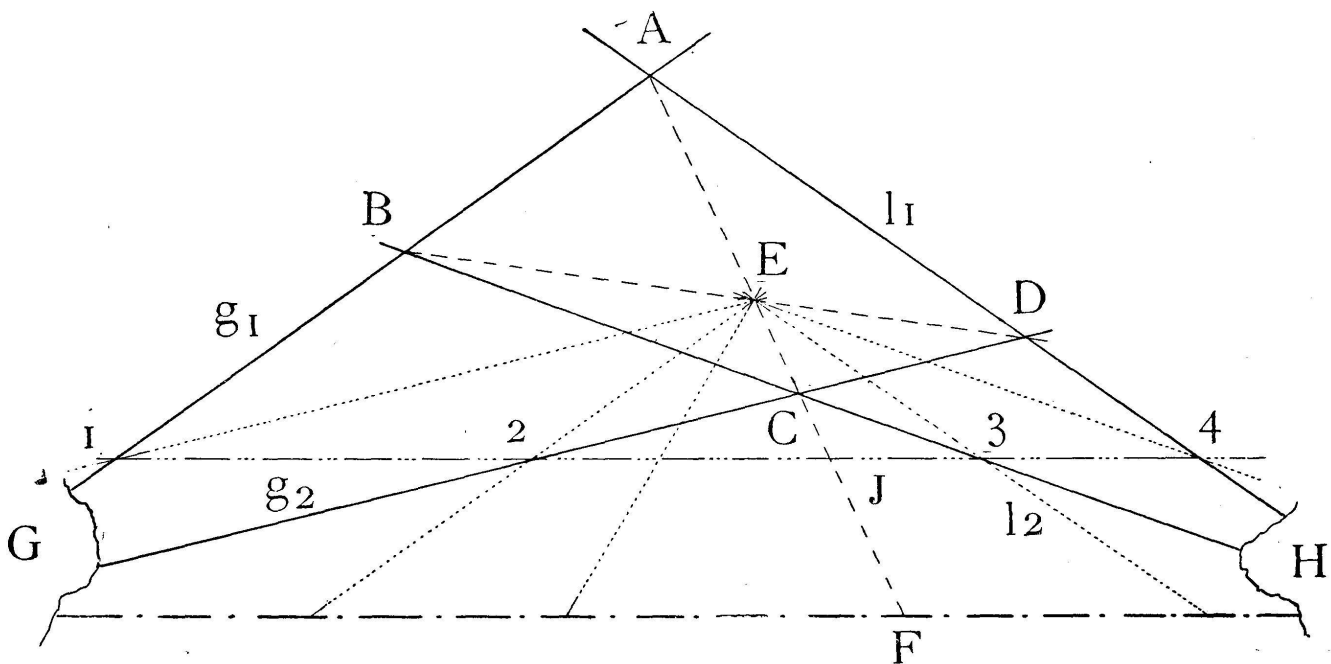


Fig. 13.

*d)*, du paragraphe précédent, à la construction de la droite de jonction des points inaccessibles B et D au moyen de parallélogrammes.

Si comme dans la figure 13 on connaît le point E d'intersection des diagonales AC et BD, on construira, — pour trouver les points correspondants sur GH, — des parallélogrammes dont 2 diagonales coïncident, sont parallèles à GH et partagent en 2 parties égales la distance de E à cette droite. Ces diagonales sont déterminées par 2 de leurs 4 extrémités (1 et 3 par exemple), il suffira de prolonger d'une longueur égale à eux-mêmes 2 rayons menés du point E à la droite (1,3), par exemple  $EI = IF$ .

IV. — Par un point donné, mener une parallèle à une droite donnée au moyen de la règle et d'un cercle fixe dont on connaît le centre.

La construction suivante n'a pour but que de montrer la possibilité théorique du problème.

Dans la figure 14 nous avons résolu le cas général où la droite donnée MN ne coupe pas le cercle en le ramenant au cas plus simple où ces deux éléments se coupent.

Pour cela joignons le point donné Q à un point quelconque P de la droite donnée MN. Quand nous aurons montré comment on

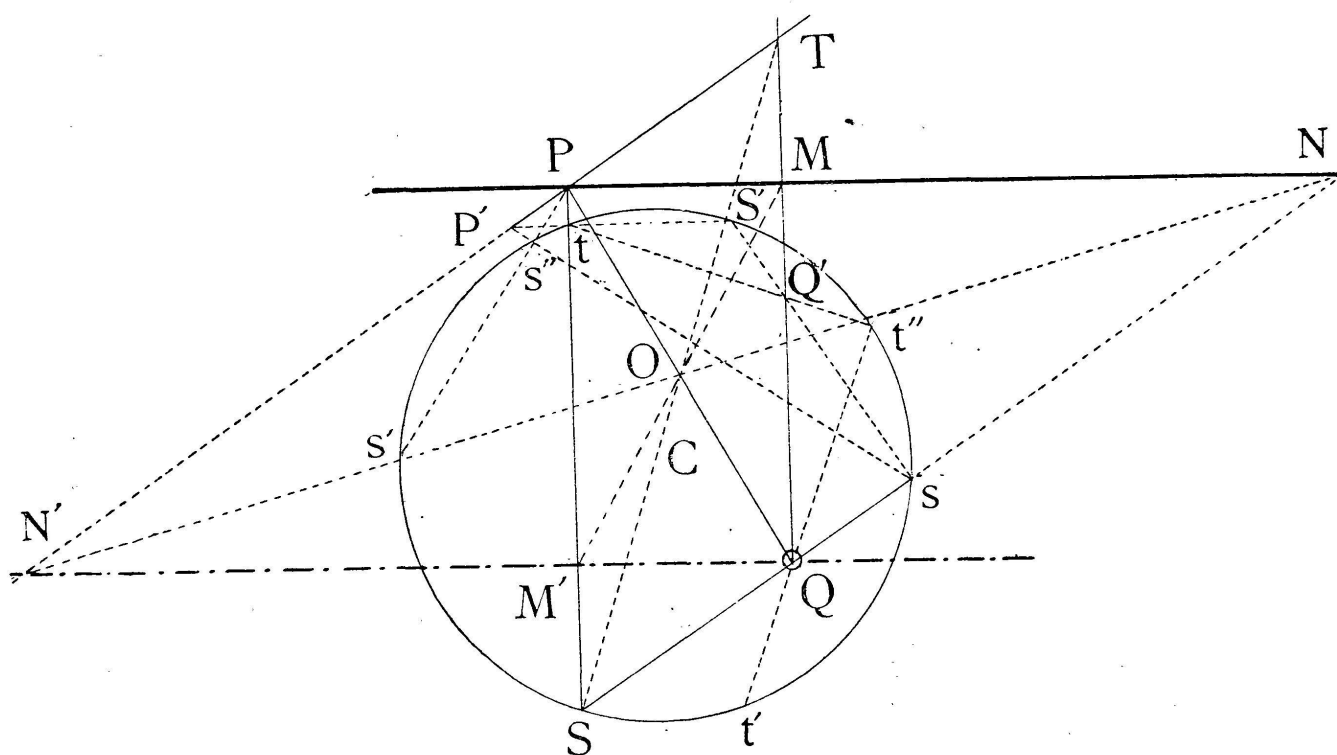


Fig. 14.

peut déterminer le milieu O de PQ au moyen du parallélogramme PSQT il ne restera plus qu'à prolonger NO jusqu'à son intersection N' avec PP'. De même l'intersection de MO et de PS nous donne un deuxième point M' de la parallèle cherchée, d'où une vérification.

Nous sommes donc ramenés à construire par le point P une parallèle à la droite QS coupant le cercle donné et par Q une parallèle à PS qui le coupe également.

Le point S est choisi arbitrairement sur la circonférence; soient t et s les points d'intersection de SP et de SQ avec la circonférence; déterminons les points t' et s' qui leur sont diamétrales-

ment opposés, menons  $t'Q$  et  $s'P$  qui couperont encore le cercle en  $t''$  et  $s''$ ; cherchons enfin le point  $S'$  diamétralement opposé à  $S$ .

Les points d'intersection  $P'$  de  $ss''$  avec  $S't$  et  $Q'$  de  $tt''$  avec  $S's$  déterminent les parallèles cherchées  $PP'$  et  $QQ'$ .

Cette construction se justifie simplement, pour  $PP'$  par exemple, en considérant que les quadrangles  $PP's''t$  et  $s''tSs$  sont formés de cordes et que les angles en  $s''$ ,  $t$  (respct.  $t''$  et  $s$ ), sont droits.

La construction connue de Steiner est plus compliquée : elle consiste à mener par un point quelconque de la circonférence une parallèle à un diamètre quelconque  $PP'$  en appliquant les propriétés du trapèze ; puis une deuxième corde parallèle et symétrique de la première par rapport au diamètre  $PP'$ . Ces 3 parallèles déterminent sur la droite  $g$  qui porte le segment à partager, 3 points équidistants, qu'on utilise pour mener par le point donné une parallèle à la droite  $g$  grâce aux propriétés du trapèze.

Enfin seulement à l'aide de cette parallèle à  $g$  et par une troisième utilisation de trapèze on partage le segment donné.

\* \* \*

Nous espérons que les constructions exposées ci-dessus auront quelque utilité dans le monde scolaire. A la suite des critiques formulées par le mouvement contemporain de réforme de ce domaine, les maîtres de mathématiques s'efforcent de se borner au plus essentiel pour donner une notion aussi claire que possible de la discipline mathématique. A ce point de vue nous croyons que les solutions ci-dessus sont propres à éveiller le désir d'invention chez les élèves, à leur donner le respect de la force des mathématiques et le sentiment qu'ils se trouvent au seuil de la plus sublime des Sciences.

Franz REDL (Trübenbach, Basse-Autriche).

Traduction du Dr Eug. CHATELAIN (La Chaux-de-Fonds).

---