Angles plans.

70. — *Définition.* J'appelle *angle plan* la portion de plan engendré par une semi-droite ox perpendiculaire à une droite zz', dans un mouvement de rotation limité autour de zz'.

Il convient d'étudier d'abord les angles plans situés dans un plan donné et ayant un *sommet* donné. On définit sans difficulté l'égalité, l'inégalité, la somme. On montre qu'on peut retourner un angle sur lui-même et par suite que la somme de deux ou plusieurs angles est commutative et associative. On démontre facilement qu'on peut partager un angle en deux parties égales. Enfin, si A et B sont deux angles, et si B n'est pas nul, on peut toujours trouver un entier n tel que l'on ait $n\,\mathrm{B} > \mathrm{A}$. Cette proposition peut être admise comme postulat. On peut d'ailleurs la démontrer, si on a soin de démontrer auparavant les théorèmes sur les perpendiculaires et les obliques, ce qui n'offre aucune difficulté.

Les angles sont donc des grandeurs directement mesurables. On comparera ensuite entre eux des angles quelconques en s'appuyant sur le théorème du n° 62.

On peut répéter pour les *arcs de cercle* tout ce qui a été dit pour les angles.

Dièdres.

71. — La théorie des *dièdres* sera calquée sur celle des angles. On étudiera d'abord les dièdres engendrés par un semi-plan tournant autour de son arête. On constatera, après avoir défini le *rectiligne :* qu'un dièdre peut être retourné sur lui-même en laissant fixe le sommet du rectiligne; que la somme des dièdres est commutative et associative; que les dièdres sont des grandeurs directement mesurables. Enfin, comme les dièdres sont proportionnels à leurs rectilignes, on déduira que tous les rectilignes d'un même dièdre sont égaux, et qu'on peut faire glisser un dièdre sur lui-même le long de son arête. On saura alors comparer deux dièdres d'arêtes quelconques.

72. — *Définition.* J'appelle *déplacement axial,* d'axe Δ, le produit d'une rotation autour de Δ par un glissement plan rectiligne le long de Δ. On démontrera sans peine que :

Théorème. *Un déplacement axial ne change pas quand on intervertit la rotation et le glissement.*

Corollaire. Si A est le déplacement axial, R la rotation, G le glissement, on a

$$\mathrm{A} = \mathrm{RG} = \mathrm{GR}$$

$$\mathrm{A}^2 = \mathrm{RG}\,.\,\mathrm{RG} = \mathrm{R}\,.\,\mathrm{R}\,.\,\mathrm{G}\,.\,\mathrm{G} = \mathrm{R}^2\mathrm{G}^2$$

et plus généralement

$$\mathrm{A}^n = \mathrm{R}^n\mathrm{G}^n$$

où n est un nombre quelconque.

J'appelle *mouvement axial* un mouvement défini par des déplacements axiaux. Un tel mouvement est à deux paramètres. J'appelle mouvement *helicoïdal* un mouvement axial dans lequel l'angle de rotation varie proportionnellement à l'amplitude du glissement.

Après avoir défini deux plans perpendiculaires, on démontrera les théorèmes suivants :

73. — Théorème. *Si deux plans sont perpendiculaires et si d'un point de l'un on abaisse la perpendiculaire D sur l'intersection, cette droite D est perpendiculaire à l'autre plan.*

74. — Théorème. *Si deux plans sont perpendiculaires et si par un point de l'intersection on mène la perpendiculaire à l'un, elle est dans l'autre.*

75. — Théorème. *Deux perpendiculaires à un même plan sont dans le même plan.*

76. — Théorème. *Par un point pris hors d'un plan on peut abaisser sur ce plan une perpendiculaire et une seule.*

77. — Théorème. *Si deux plans sont perpendiculaires et si d'un point de l'un on abaisse la perpendiculaire sur l'autre, elle est toute entière dans le premier.*

On étudiera ensuite les projections orthogonales, la symétrie, les perpendiculaires et les obliques, les triangles, les trièdres.

II. — LES TRANSLATIONS

Glissements plans rectilignes.

78. — *Définition.* J'appelle *espace euclidien,* tout espace lobatschefskien qui satisfait au postulat suivant.

79. — *Postulat XII. Le groupe des déplacements lobatschefskiens admet un sous-groupe invariant.*

Les déplacements d'un espace euclidien s'appelleront des *déplacements euclidiens.* Les déplacements du sous-groupe invariant s'appellent des *translations.*

Un *mouvement de translation* est un mouvement défini par un ensemble continu de translations.

80. — Théorème. *Toute translation qui laisse un point fixe est la translation identique.*

Supposons qu'une translation T laisse fixe un point A. D'après un théorème précédent, cette translation serait équivalente à une rotation R_0, d'angle α autour d'un axe Δ_0 passant par A.

Je dis que, s'il en était ainsi, toute translation serait une rotation. En effet, une rotation R, d'angle α, autour d'un axe quelconque Δ, peut être considérée comme la transformée de la rotation R_0