Pierre Boutroux. — Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre, avec une note de M. Paul Painlevé. — 1 vol. gr. in-8°, 190 p.; 6 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris.

Autor(en): **Buhl, A.**

Objekttyp: **BookReview**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1909)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.04.2024**

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

BIBLIOGRAPHIE

F. Bennecke. — **Eine konforme Abbildung** als zweidimensionale Logarithmentafel zur Rechnung mit komplexen Zahlen. — 1 fasc. in-4°; O. Sall, Berlin.

C'est une application de la représentation conforme à la résolution graphique des opérations à effectuer sur des nombres complexes. La table, établie avec beaucoup de soin par l'auteur, permet de chercher directement le logarithme vulgaire de $x + iy$ et réciproquement. Elle est obtenue à l'aide de la correspondance par points sur deux plans de la fonction $Z = \log z$.

Si l'on a $X + iY = \log(x + iy)$, on obtient les deux familles de courbes

$$x = 10^X \cos(Y \ln 10) , \qquad y = 10^X \sin(Y \ln 10) .$$

Lorsqu'on n'exige pas une très grande approximation, cette méthode graphique conduit très rapidement au résultat.

Pierre Boutroux. — **Leçons sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre,** avec une note de M. Paul Painlevé. — 1 vol. gr. in-8°, 190 p.; 6 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris.

Pour comprendre exactement l'objet et la portée de ces leçons il est bon, il me semble, de partir d'abord d'une remarque qui, depuis nombre d'années, s'impose aux géomètres et qui a été particulièrement précisée par M. Painlevé. De toutes les transcendantes définies par les équations différentielles il n'y en a qu'un très petit nombre dont l'étude révèle une propriété exacte telle, par exemple, que la périodicité. Dès lors, à défaut de propriétés exactes, l'effort présent et l'effort à venir ne peuvent être tournés que vers l'étude de propriétés approchées. M. Pierre Boutroux est déjà entré dans cette voie en étudiant, dans sa thèse, les fonctions méromorphes nouvelles satisfaisant à des équations différentielles formées par M. Painlevé et en montrant que ces intégrales, quotients de fonctions entières, croissaient suivant le mode exponentiel.

Il s'agit maintenant de recherches qu'on peut rattacher au point de départ précédent, mais qui sont beaucoup plus avancées et intéressent d'ailleurs de nouvelles équations, notamment celles de la forme $y'Q = P$, P et Q étant des polynômes en x et y et plus particulièrement

$$y' + A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 = 0 ,$$

les A étant des polynômes en x.

Ce qu'il faut remarquer tout d'abord, et ce qui constitue un pas en avant d'une importance capitale, c'est l'apparition nécessaire de fonctions multiformes à une infinité de branches. On démontre que, parmi les équations des types précédents, l'équation de Riccati est la seule dont l'intégrale soit uniforme et que des fonctions à un nombre fini de branches ne peuvent satisfaire qu'à des équations se ramenant par une transformation rationnelle à une équation de Ricrati. Quoique très simple, la démonstration de ces faits n'en va pas moins sans un certain étonnement. Nous avons donc devant nous le champ de fonctions à une infinité de branches et rien pour ainsi dire dans l'analyse créée jusqu'à ce jour ne donne de méthodes pour en aborder l'étude. Les fonctions multiformes considérées jusqu'ici n'avaient, en général, qu'un nombre fini de branches, elles étaient en relation simple, par leurs inverses avec les fonctions uniformes et enfin on savait construire des surfaces de Riemann, à un nombre fini de feuillets, sur lesquelles des coupures appropriées les rendaient uniformes.

Ici les questions sont d'une autre nature. M. Pierre Boutroux cherche à étudier d'abord la croissance et l'allure de certaines branches de l'intégrale de $y'Q = P$ où P est de degré p en y et Q de degré q. Il montre que, moyennant certaines conditions initiales et pour $p - q = 1$, il existe des branches qui, dans de certains angles ayant leur sommet à l'origine, n'ont ni zéros ni points singuliers d'aucune sorte. Ce sont des branches à croissance exponentielle. Si la condition $p - q = 1$ n'est pas réalisée, des circonstances plus complexes se présentent, mais il existe alors des branches également fort remarquables qui, sur une surface de Riemann dont on excepte certains cercles dont la somme des aires est en rapport nul avec l'aire totale de la surface, croissent moins vite qu'une puissance finie de x. Ce sont des branches à croissance rationnelle.

La classification des points singuliers transcendants paraît devoir être fort laborieuse à cause du très grand nombre de cas qu'il faudrait considérer. Si encore il n'existait que des points autour desquels se permutent une infinité de branches ! Mais en dehors de ces points que l'auteur appelle *directement critiques*, il en existe d'autres, *indirectement critiques*, qui sont limites d'un ensemble de points tels qu'autour de chacun d'eux les permutations sont possibles. Dans ces conditions les divers types de singularités se divisent en cas qui comprennent des sous-cas, et il semble même que l'on puisse subdiviser indéfiniment la classification. Au milieu de cet écheveau compliqué, l'auteur trouve des fils conducteurs par des procédés ingénieux et simples. Il considère des équations particulières, même certaines dont les intégrales sont déterminables par les procédés élémentaires et, partant de tels repères, établit par analogie des résultats plus généraux et qui semblent de la plus haute importance. Il revient sur les points singuliers classiques de Briot et Bouquet et montre qu'il n'y avait là qu'une classification provisoire, ces points pouvant être de natures fort diverses et n'ayant été rapprochés que par suite d'un point de vue très spécial. Enfin il étudie les relations qui peuvent exister entre diverses branches d'intégrales sans s'astreindre à rester dans le voisinage d'un point critique.

M. Paul Painlevé a terminé l'ouvrage par une note de 46 pages où il étudie la réduction à des formes canoniques des équations dont les intégrales n'ont qu'un nombre fini de branches. Les problèmes qui restent posés, soit par les recherches de M. Boutroux, soit par celles de M. Painlevé, nous permettent sans doute des résultats non moins intéressants que ceux déjà obtenus. Et que l'on ne croie pas que la complexité des questions entraîne quelque difficulté dans la lecture de l'œuvre ; au contraire, tout paraît intuitif, inspiré de l'esprit d'analogie et construit, non pas en démontrant et en entassant des détails ardus, mais en faisant de larges appels à la notion de continuité.

A. Buhl (Montpellier).