MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **11 (1909)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur les formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique.

Nous n'avons pas ici l'intention de faire connaître la moindre formule nouvelle, mais d'indiquer un moyen de soulager la mémoire des débutants dans l'application des formules fondamentales de la Trigonométrie sphérique.

On est dans l'habitude, en France tout au moins, de constituer le système de ces formules fondamentales au moyen de celles dites de Gauss qui sont

$$\begin{aligned} &\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ &\sin a \sin B = \sin b \sin A, \\ &\sin a \cos B = \sin c \cos b - \sin b \cos c \cos A, \end{aligned}$$

la corrélative de (1)

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

et celles qui s'en déduisent par permutation, auxquelles on ajoute les formules dites spéciales du triangle rectangle qui sont

$$\begin{aligned} &\cos a = \cos b \cos c = \operatorname{cotg} B \operatorname{cotg} C, \\ &\sin b = \sin a \sin B = \operatorname{tg} c \operatorname{cotg} C, \\ &\cos B = \cos b \sin C = \operatorname{tg} c \operatorname{cotg} a. \end{aligned}$$

Et telle est la confusion qui risque de se produire entre ces dernières formules qu'on a imaginé diverses règles mnémoniques pour assurer leur application correcte.

Ne serait-il pas plus simple de réduire tout l'effort de mémoire à retenir le seul système fondamental constitué par

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \tag{1}$$
$$\sin a \sin B = \sin b \sin A, \tag{2}$$
$$\cos a \cos B = \sin a \operatorname{cotg} c - \sin B \operatorname{cotg} C, \tag{3}$$

et la corrélative de (1) que nous appelons toujours (1′) et qu'il est inutile d'écrire puisque cela peut se faire sans nul effort quand on a (1) présente à l'esprit ?

Ce dernier système a l'avantage de fournir instantanément la formule correspondant à un cas de résolution quelconque des triangles quelconques, et de rendre inutile de retenir les formules du triangle rectangle.

En effet, tout calcul d'un élément quelconque d'un triangle sphérique s'opère toujours au moyen de trois éléments connus de ce triangle. Parmi ces quatre éléments il y a nécessairement :

1° ou bien un groupe de trois éléments contigus et un séparé,

2° ou bien deux groupes de deux contigus,

3° ou bien un seul groupe de quatre contigus.

Dans le cas 1°, la solution est fournie par la formule (1) [ou (1')]; dans le cas 2°, par la formule (2); dans le cas 3°, par la formule (3) (à une permutation près entre les lettres a, b, c et A, B, C, bien entendu ; cela n'ajoute rien à ce dont se doit charger la mémoire).

Maintenant, pour un cas quelconque de résolution des triangles rectangles, l'angle droit, joint aux deux autres éléments donnés et à l'élément inconnu, donne naissance à l'une des dispositions 1°, 2° ou 3° ci-dessus. La formule (1), (2) ou (3) correspondante, où l'on introduit l'angle droit à sa place, fournit alors, immédiatement, la formule correspondante du tableau spécial rappelé plus haut, qu'il y aurait lieu d'appliquer.

Supposons, par exemple que, dans un triangle rectangle dont l'angle droit est en A, on veuille calculer B connaissant a et c. Les éléments A, c, B, a forment une disposition 3°. Or, la formule (3) donne, par permutation,

$$\cos c \cos B = \sin c \operatorname{cotg} a - \sin B \operatorname{cotg} A \ ,$$

qui, avec l'hypothèse $A = 90°$, devient immédiatement

$$\cos B = \operatorname{tg} c \operatorname{cotg} a \ ,$$

formule demandée.

Maurice d'OCAGNE. (Paris)

Le laboratoire d'enseignement mathématique de l'Ecole Normale Supérieure de Paris.

1. — Lors de la réforme de l'Enseignement Secondaire, en 1902, l'un des articles du projet ministériel soumis à la Commission de l'Enseignement de la Chambre des Députés, était « d'organiser et diriger l'Ecole Normale Supérieure de façon à en faire un véritable Institut pédagogique ». Ce désideratum était déjà partiellement réalisé, tout au moins pour la Section de Mathématiques; la préparation des leçons d'Agrégation et leur critique constituant pour les élèves de troisième année une initiation pédagogique. La réforme récente de l'Agrégation (décret de mai 1904, appliqué en juillet 1907) a accentué cet état de choses. En effet les leçons exigées des Candidats à l'oral du Concours doivent porter sur des

sujets extraits uniquement des programmes actuels des classes des Lycées (2e Cycle, mathématiques A et B et mathématiques spéciales). Ce programme d'examen attire tout naturellement l'attention et les études des Candidats sur l'Enseignement actuel des Lycées, sur les divers livres et les diverses méthodes employés.

C'est afin de faciliter et de développer ces études que, sous la direction de MM. TANNERY et BOREL, fut créé, à l'Ecole Normale Supérieure, le *Laboratoire d'Enseignement mathématique*. Une salle est mise par l'Administration de l'Ecole à la disposition du Laboratoire, dont le fonctionnement est assuré par une subvention de l'Université de Paris. Elle est ouverte aux élèves des trois promotions scientifiques, mais est plus spécialement destinée aux élèves de troisième année, candidats à l'Agrégation, qui doivent enseigner l'année suivante.

2. — Les élèves trouvent au Laboratoire la plupart des livres de mathématiques publiés en France pour l'Enseignement Secondaire et, en même temps quelques Revues pédagogiques ou professionnelles que ne reçoit pas la Bibliothèque générale et que les Editeurs ont bien voulu mettre gracieusement à notre disposition. Nous espérons y adjoindre, d'ici peu, une collection de livres scolaires allemands et anglais. Il serait en effet très intéressant, pour les futurs professeurs, de connaître un peu les programmes et les tendances pédagogiques des pays étrangers.

3. — En dehors de la bibliothèque, il existe au Laboratoire des travaux pratiques. Toutes les semaines il y a une séance de travail du bois : un professeur de menuiserie apprend aux élèves à dégrossir une pièce de bois, à se servir d'une scie, d'une varlope et d'un rabot. Cet enseignement paraîtrait à priori plutôt destiné aux élèves de la Section de physique[1]. Cependant les mathématiciens ont un double intérêt à le suivre et c'est ce que je vais essayer d'indiquer en quelques mots. Dans plusieurs Lycées de France — et c'est une initiative qui tend à se généraliser — on a organisé des exercices de travaux manuels. Pour les diriger, on fait appel à des ouvriers, habiles dans leur métier, mais dont les connaissances scientifiques ne sont pas toujours suffisantes pour leur permettre de montrer aux élèves le lien entre ce qu'on leur enseigne en classe et ce qu'on leur fait faire à l'atelier. Il y aurait donc un assez grand intérêt à ce que le professeur de mathématiques puisse donner à ses élèves les indications nécessaires à la transition entre les notions théoriques et la réalisation pratique. Pour cela il est bon et même indispensable que ce professeur ait lui-même des connaissances techniques et pratiques.

D'autre part, il lui serait également très utile de se rendre

[1] Pour ces élèves des séances de travail du bois et des métaux ont été organisées depuis plusieurs années.

compte des difficultés à surmonter pour la confection d'un petit modèle en bois, et, de pouvoir au besoin diriger le travail d'un ouvrier pour la reproduction du modèle. «Les instructions pour l'enseignement des mathématiques», annexées à l'arrêté du 27 juillet 1905, portent en effet que, «pour les élèves du premier Cycle et des divisions A et B l'enseignement doit être essentiellement concret» et, recommandent l'emploi «d'une collection de modèles et d'appareils simples». On trouve actuellement dans le commerce, en France, quelques collections de modèles mathématiques, mais destinées surtout à l'Enseignement Primaire. Les Professeurs sont donc encore obligés de faire confectionner sur place ou de confectionner eux-mêmes les appareils qu'ils désireraient utiliser dans leur classe[1].

4. Le Laboratoire a commencé à constituer une petite collection de modèles tant en bois qu'en carton. Mais étant données leurs provenances diverses et la création récente du Laboratoire, cette collection est encore un peu disparate. Je voudrais donner néanmoins un aperçu des quelques idées générales qui nous ont guidés jusqu'à maintenant[2].

La mesure des volumes a donné lieu à une première série de modèles : méthode classique pour le volume du parallélipipède rectangle, — réalisation géométrique du cube d'une somme — décomposition d'un prisme en trois pyramides équivalentes — équivalence du prisme ou du cylindre droit avec le prisme ou le cylindre oblique. Pour tous ces objets on s'est écarté nettement du point de vue expérimental et physique. Les modèles sont, au contraire, de véritables copies des démonstrations ; des figures de l'espace destinées à remplacer les dessins du tableau noir. Par exemple, on démontre l'équivalence des prismes droit et oblique par la superposition de deux troncs de prismes qui donne, suivant les bases en contact, un prisme droit ou un prisme oblique.

Un paragraphe introduit récemment dans les programmes a servi de point de départ à beaucoup de modèles. Je veux parler des «notions sommaires sur les symétries du cube et de l'octaèdre» : cube coupé en deux suivant une section hexagonale — octaèdre ou tétraèdre inscrits dans un cube pour montrer l'identité des symétries — cube à faces dissemblables — quelques autres figures simples dont on peut trouver aisément les symétries. A ce même ordre d'idées on pourrait rattacher quelques appareils relatifs à l'introduction des déplacements en géométrie. Un des repro-

[1] Il existe des collections très riches et très variées éditées, entre autres, par les maisons suivantes . Lehrmittel anstalt, J. Ehrhard & Cie, Bensheim (Hesse); Polytechnisches Arbeits-Institut, Schröder, Darmstadt; Schilling, Halle ; Teubner, Leipzig. Nous nous bornons à signaler celles dont nous avons les catalogues sous la main. *Réd.*

[2] Ces modèles ont été pour la plupart imaginés et réalisés entièrement par des élèves de l'Ecole normale.

ches fait par les partisans de la théorie ancienne des parallèles à la théorie moderne des translations est que cette dernière manque de figures, le mouvement ne pouvant se représenter sur un tableau noir[1]. Ce reproche n'existerait plus si le professeur avait à sa disposition des figures mobiles au lieu d'un seul tableau.

Enfin nous avons en beaucoup plus petit nombre des modèles relatifs à la géométrie du V^e livre. Une des difficultés les plus sérieuses pour les commençants est en effet de « voir » ce que représentent les figures de perspective plus ou moins grossières qui servent à illustrer les principales démonstrations du V^e livre. Cette difficulté serait bien diminuée si, avant de faire une figure au tableau — figure qui n'est au fond qu'un schéma plus algébrique que géométrique — le professeur montrait aux élèves la figure elle-même de l'espace. Pour cela il suffit de quelques plaques de liège, quelques fils de fer et d'un peu d'ingéniosité. Je citerai parmi les modèles actuellement en notre possession : la réalisation du théorème de Dandelin ou plutôt de sa démonstration. — La perpendiculaire commune à deux droites.— Quelques figures de la géométrie du tétraèdre et des trièdres.

Nous pensons commencer sous peu la réalisation de quelques appareils pour l'enseignement de la Mécanique. Dans le programme de mathématiques A, l'on a en effet ajouté aux notions de mécanique théorique quelques notions de mécanique appliquée : engrenages, articulations, joints, etc. M. Koenigs, directeur du Laboratoire Mécanique Physique de la Sorbonne a bien voulu mettre à notre disposition quelques appareils de sa belle collection. Il pourront servir de modèles pour en établir d'autres plus schématiques et plus élémentaires. Nous voudrions en particulier réaliser quelques parallélogrammes et quadrilatères articulés, pantographes et inverseurs, qui illustrent si bien les théories de l'homothétie et de l'inversion et qui peuvent même trouver leur place dans l'enseignement tout à fait élémentaire de la géométrie du 1^er livre[2].

Nous n'avons encore aucun modèle pour la géométrie descriptive; nous possédons seulement quelques exemplaires de surfaces géométriques (conoïde de Plücker — hélicoïde —).

Nous serions très reconnaissants aux lecteurs de la Revue qui pourraient nous envoyer d'autres projets de modèles. Je me ferai un plaisir de signaler dans une chronique ultérieure les idées qu'on aura bien voulu me communiquer et qui auront pu être mises à exécution[3].

On nous objectera peut-être, qu'une collection de modèles aussi

---

[1] Article de M. Marotte, *Revue de l'Enseignement des Sciences*, décembre 1907, page 361.

[2] Cf. l'article de M^lle Salomon, *Revue de l'Enseignement des Sciences*, février 1909.

[3] Prière d'envoyer les communications à M. Châtelet, laboratoire d'enseignement mathématique, Ecole Normale Supérieure, 45, rue d'Ulm, Paris.

élémentaires n'a qu'une utilité restreinte et que chaque professeur peut parfaitement imaginer lui-même des appareils simples sans avoir besoin d'en copier d'autres déjà réalisés. Cette objection est fondée, mais pour cela comme en beaucoup d'autres cas, la collaboration est préférable aux efforts isolés. Le même fait s'est produit pour l'enseignement de la Physique. On a réclamé des professeurs de Lycées un très grand effort en leur demandant d'imaginer et d'organiser des manipulations avec les ressources souvent faibles de leurs laboratoires. Il est évident que leur travail a été beaucoup simplifié le jour où la Société de Physique a décidé de grouper les tentatives isolées et a publié, par l'entremise de son secrétaire M. Abraham, le Recueil des expériences de physique communiquées par ses correspondants.

5. — Il me reste à indiquer un dernier but du laboratoire. Nous avons l'intention, dans la mesure où les crédits le permettront, d'y réunir une collection d'instruments de mathématiques pures ou appliquées. Nous nous sommes déjà procuré une machine à calculer et nous sommes en pourparlers pour l'acquisition d'une collection d'instruments de géodésie et d'arpentage. Il est certain que plusieurs parties du programme actuel de mathématiques de l'Enseignement secondaire (applications de la trigonométrie au levé des plans, calculs numériques, etc.), auraient bien plus d'attraits pour les élèves et pour le professeur, si ce dernier, au lieu d'avoir sur ces sujets de simples notions théoriques, connaissait effectivement la manière d'opérer des praticiens.

6. — J'ai indiqué de mon mieux l'état et les tendances actuelles du Laboratoire de mathématiques. Je dois ajouter que c'est surtout à l'initiative de M. Borel qu'il doit son existence. Nous avons encore beaucoup à faire pour réaliser le but qu'il s'était proposé. Nous avons eu contre nous, outre des difficultés matérielles, les résistances inhérentes à chaque création nouvelle. Le temps et la bonne volonté permettront sans doute à nous ou à nos successeurs d'en venir complètement à bout. Les élèves de l'école normale ont accueilli favorablement cette initiative; l'état actuel du laboratoire est surtout leur œuvre et leur collaboration est la plus sûre garantie du succès.

A. Chatelet (Paris)
ancien élève de l'Ecole Normale Supérieure.

Notations rationnelles pour le système vectoriel.

A propos du système proposé[1] par MM. Burali-Forti et Marcolongo.

3. — *Opinion de* M. F. Klein (Gœttingue).

M. Klein a mentionné en passant la question de la notation vectorielle dans ses leçons, du semestre d'hiver 1907-08, sur les mathématiques élémentaires envisagées à un point de vue supérieur (v. *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus,* cours autographié, t. I, p. 157-158). Il rappelle que, dans une réunion de Cassel, en 1903, les mathématiciens allemands ont désigné une commission chargée d'examiner l'unification de la notation vectorielle. Les membres n'ont cependant pas pu tomber d'accord, mais chacun ayant voulu témoigner de la bonne volonté en faisant des concessions sur son point de vue primitif, il en résulta à peu près 3 notations nouvelles ! Après cette expérience et d'autres essais analogues, il me semble qu'un accord de ce genre sur des dénominations et des notations n'est possible que lorsque des intérêts matériels d'ordre extérieur sont en jeu. Ainsi, ce n'est que sous une pareille pression qu'en Electrotechnique on a adopté un système d'unités, *volt*, *ampère*, *ohm ;* l'industrie en ressentait un vif besoin et il était indispensable de pouvoir légiférer dans ce domaine sur une base uniforme. Dans le Calcul vectoriel il n'y a pas, pour le moment, des intérêts aussi grands, et il faudra sans doute se contenter de voir chaque mathématicien employer la notation qui lui semble la plus commode, ou, s'il est enclin aux questions d'ordre dogmatique, celle qui lui semble la seule correcte.

4. — *Lettre de* M. Edw. B. Wilson (Boston).

Mon cher Monsieur Fehr,

Vous me faites l'honneur de me demander mon opinion au sujet des notations vectorielles proposées par MM. Burali-Forti et Marcolongo. Voici les remarques qu'elles me suggèrent :

1° Tout d'abord je ferai remarquer qu'il suffit de jeter un coup d'œil sur un certain nombre de traités de calcul différentiel et intégral pour constater un manque absolu d'uniformité. Ainsi, pour la dérivée les notations

$$\frac{dy}{dx}\ ,\ \mathrm{D}y\ ,\ \mathrm{D}_x y\ ,\ y'\ ;$$

[1] Voir l'*Ens. Math.*, XI[e] année, n° du 15 janvier 1909, p. 41-45, n° du 15 mars, p. 124-134.

sont d'un usage courant. Pour les dérivées partielles, la diversité est encore plus grande, soit

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{dF}{dx}, \left(\frac{dF}{dx}\right)_{y,z\,\ldots}, D_x F, F_x, F'_x.$$

Il en est de même pour les notations, concernant les intégrales doubles :

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{y_1}^{y_2} F\,dx\,dy, \quad \int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} F\,dx\,dy, \quad \int_{y_1}^{y_2} dy \int_{x_1}^{x_2} F\,dx.$$

L'uniformité ne règne donc en aucune mesure dans ce domaine. Le fait qu'un même auteur emploiera suivant les circonstances des notations différentes est une preuve suffisante que l'uniformité n'est pas recherchée et serait même gênante. Pourquoi cette uniformité serait-elle alors désirée avec tant d'ardeur pour l'analyse vectorielle ?

2° L'uniformité des notations dans l'analyse vectorielle est-elle réellement importante ? On peut remarquer que les formules et les opérations d'analyse vectorielle actuellement employées dans les divers traités de mécanique, électricité, magnétisme et théorie électromagnétique sont en fort petit nombre et ne sont par conséquent pas difficiles à comprendre, quelle que soit la notation employée par l'auteur. La compréhension de la part du lecteur est encore facilitée par le fait que dans les applications ordinaires il n'y a pas besoin d'un système très complet d'analyse vectorielle et que de plus, chaque formule est généralement l'énoncé d'un fait physique déterminé qui s'impose mieux à l'esprit que les symboles eux-mêmes. Il semblerait que s'il existe un domaine dans lequel la nécessité de l'uniformité ne se fait pas sentir, c'est celui de l'analyse vectorielle; aussi est-il difficile de comprendre pourquoi des réformes de ce genre seraient considérées comme très importantes.

3° Une uniformité quelconque pourrait-elle être imposée ? Il est mal aisé de se représenter comment un auteur pourrait être obligé ou amené à se servir des notations recommandées même par un comité international. Le travail du comité ne serait évidemment adopté par chaque auteur que dans la mesure où celui-ci approuverait les notations proposées. La seule obligation que le comité pourrait imposer serait tout au plus une sorte d'obligation sociale.

Ce mouvement en faveur de l'uniformité est en corrélation avec bien des changements politiques et sociaux de nature socialiste qui tendent à porter atteinte à la liberté de l'individu, changements qui sont constamment combattus par les économistes réfléchis et qui ne sont généralement exécutés qu'après beaucoup de difficultés. Il suffit de citer les troubles et les inconvénients relatifs à la récente loi française sur le repos hebdomadaire. Le comité international pour l'analyse vectorielle n'aurait aucune autorité politique.

4° Un fait qui mérite d'être mentionné, c'est que l'analyse vectorielle n'est qu'une minime partie de l'algèbre générale et de ses diverses applications. Il est presque impossible de déterminer la limite entre l'analyse vectorielle et les autres branches de l'algèbre. On doit remarquer que tant que l'analyse vectorielle traite de questions de physique, elle se sert presque exclusivement du système de coordonnées rectangulaires et du groupe de mouvements des systèmes rigides; il en est encore de même pour l'application des vecteurs à la discussion de milieux élastiques ou à la propagation de la lumière dans les cristaux. D'un autre côté les vecteurs peuvent souvent être employés avec succès dans des problèmes géométriques où il ne s'agit pas de systèmes rigides ou de la notion de perpendicularité. Il semble impossible et certainement inutile d'établir un ensemble de notations uniformes pour un nombre aussi considérable de sujets et de méthodes que ceux auxquels les vecteurs peuvent s'appliquer. Voilà pour les généralités.

Je m'occuperai maintenant des propositions que les professeurs Burali-Forti et Marcolongo ont présentées comme résultat de leur étude critique et historique si approfondie et détaillée du sujet. On remarquera que leurs propositions s'occupent exclusivement du système minimum d'analyse vectorielle, c'est-à-dire de ce qui concerne l'addition des vecteurs, les produits de grandeurs scalaires et de vecteurs, le gradient d'une fonction scalaire, et la divergence et la rotation d'une fonction vectorielle. Ils ne suggèrent aucune notation pour les fonctions vectorielles linéaires et les notions importantes qu'y s'y rattachent en grand nombre. C'est une omission sérieuse, car la considération de la fonction vectorielle linéaire peut jeter un jour nouveau sur la question de ce qui est nécessaire pour le système minimum.

Les abréviations introduites par l'analyse vectorielle dans la physique théorique ne sont nul part plus importantes que dans l'étude de sujets tels que les théories de l'élasticité et de l'optique des cristaux, étude qui nécessite l'emploi de la fonction vectorielle linéaire, ou de son équivalent; en fait, les abréviations sont relativement beaucoup plus importantes dans ce domaine que dans les branches de physique qui peuvent se passer de l'analyse vectorielle. On peut prédire que si l'analyse vectorielle fait son chemin d'une manière générale et permanente dans l'exposé des théories physiques simples, les autres théories qui pourraient avantageusement faire usage de la fonction vectorielle linéaire entreront sûrement dans le mouvement et emploieront ces méthodes. Il semble donc très peu sage de ne pas conserver des notations qui deviendront alors nécessaires, et je considère comme très peu satisfaisant tout système de notations qui ne tient pas compte de ce fait.

Je ne veux pas m'apesantir plus que de raison sur la fonction vectorielle linéaire et les relations de l'analyse vectorielle avec l'algèbre, mais il me semble que ce n'est qu'en prenant suffisamment en considération ces choses-là que l'on peut acquérir les vues larges, nécessaires à une discussion rationnelle de la question subordonnée des notations pour le système minimum de l'analyse vectorielle. C'est par exemple la seule manière de voir qu'il y a non seulement 2, mais 3 produits de vecteurs, soit : le produit scalaire, le produit vectoriel et le produit « dyade », et que ce dernier, quoique moins élémentaire au point de vue du physicien, est cependant théoriquement le plus fondamental de tous. C'est la seule manière de comprendre que la majorité de ce qu'on appelle les « raisons » pour accepter ou refuser une notation spéciale pour le système minimum sont entièrement imaginaires[1].

En ce qui concerne l'usage du point pour le produit scalaire, il a souvent été énoncé (et les auteurs susnommés semblent l'impliquer) que le point est un séparateur et non un signe de multiplication et par conséquent ne doit pas être employé pour le produit scalaire. Ce n'est pas une conséquence! Pour Gibbs et ses disciples le point est employé essentiellement comme un séparateur ; pour eux, le produit $\mathbf{ab}$ est le produit *dyade* fondamental et, le point, ou tout autre signe de séparation ou de fonctionnalité, est nécessaire pour séparer les vecteurs. Je crois fermement à l'avantage et à la nécessité de la liberté individuelle et je n'ai point d'objection à faire à quiconque dit « Je ne me servirai pas de la notation $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ pour le produit scalaire, car je ne le désire pas », mais si quelqu'un dit « Vous ne devez pas employer la notation parce que le point est un séparateur », cela ne me convainc pas.

J'ai également de la peine à comprendre d'autres énoncés que les auteurs mettent sous la rubrique notations à exclure et principales raisons de l'exclusion. Ils disent par exemple que dans les expressions $\nabla \cdot \mathbf{u}$ et $\nabla \times \mathbf{u}$ pour la divergence et la rotation le symbole ∇ devrait être un vecteur symbolique, mais qu'il n'a pas les propriétés des vecteurs en ce qui concerne la multiplication scalaire et vectorielle. Pour mon compte, j'ai toujours (à tort, semble-t-il) regardé ∇ comme un vecteur symbolique et j'ai tou-

[1] Pour ne pas abuser de l'offre généreuse de vos colonnes, je renverrai le lecteur à un certain nombre de publications où j'ai exprimé mes vues relatives à l'analyse vectorielle et ses notations : *Vector Analysis*, par J. Willard Gibbs, publié Edw. Wilson, New-York, 1901. — *On Products in additive Fields*, *Verhandlungen des III. Internationalen Mathematiker-Kongresses*, Leipzig, 1905. — *On divergence and Curl*, *american Journal of Science*, 1907. — *On Double Products and Strains in Hyperspace*, *Transactions of the Connecticut Academy*, 1908.

jours estimé qu'il avait toutes les propriétés vectorielles qui pouvaient être attendues d'un opérateur différentiel. (Il ne faut évidemment pas demander trop. Quand D est employé ainsi qu'il est d'usage comme symbole de différentiation dans la théorie des équations linéaires, il a des propriétés quelque peu différentes de celle d'un nombre). L'une des formules de physique mathématique les plus utiles est

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla\nabla \,.\, \mathbf{u} - \nabla \,.\, \nabla\mathbf{u}$$

et il est difficile de la distinguer d'une manière formelle de la formule fondamentale

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{u}) = \mathbf{a}\,\mathbf{a} \,.\, \mathbf{u} - \mathbf{a} \,.\, \mathbf{a}\mathbf{u} \,.$$

Mais il est évident que je n'ai pas réussi à comprendre ce que les auteurs voulaient dire.

L'affirmation que $\nabla\mathbf{u}$ et $\nabla \times \mathbf{u}$ sont tachygraphiques pour les coordonnées cartésiennes est fausse. Ces symboles ne contiennent pas la plus légère référence aux coordonnées cartésiennes, excepté lorsque l'on désire les traduire dans ces coordonnées. Le symbole $\nabla\mathbf{u}$ est défini par la formule

$$d\mathbf{u} = d\mathbf{r} \,.\, \nabla\mathbf{u}$$

qui est la formule pour la différentielle totale d'une fonction vectorielle et les quantités $\nabla \,.\, \mathbf{u}$ et $\nabla \times \mathbf{u}$ sont des invariants fondamentaux en rapport avec le « dyadic » $\nabla\mathbf{u}$. Je parle ici au point de de vue théorique et scientifique auquel se place celui qui s'occupe de l'algèbre générale. Il se peut que, au point de vue pédagogique, pour celui qui désire introduire la divergence et la rotation aussi rapidement et facilement que possible, pour ceux qui s'intéressent seulement au système minimum, il serait plus utile de considérer provisoirement les symboles comme de simples tachygraphes.

Il va sans dire que les remarques ci-dessus ne sont aucunement faites avec une intention de critique hostile des notations suggérées par les professeurs Burali-Forti et Marcolongo, ni pour amoindrir le travail ardu et consciencieux qu'ils ont fourni par leur recherche historique et critique sur la question des notations vectorielles. Je ne romprai pas de lance en faveur des notations de Gibbs ou de celles de qui que ce soit. Mes seules objections sont dirigées contre des « raisons » qui ne me semblent pas convaincantes. Comme observation personnelle j'avouerai volontiers que j'ai une préférence pour la lecture d'un traité de physique théorique dans une notation vectorielle quelconque, plutôt que dans la notation cartésienne. Pour mes propres lectures je préfère le système de Gibbs, non pas parce qu'il m'est plus familier, mais parce que je trouve qu'il fournit une notation satisfaisante pour le système minimum ; qu'il est déjà à un degré de développement où il peut être immédiatement appliqué pour l'élasticité et l'optique, et qu'il a été élaboré par son auteur en tenant compte de la place occupée par l'analyse vectorielle comme branche de la science générale de l'algèbre.

Il est intéressant de noter, et pour les adhérents au système de Gibbs c'est un plaisir, que les auteurs ont adopté des signes pour les 2 produits scalaires et vectoriels. Cela laisse la voie ouverte pour l'extension de leur système jusqu'à inclure, cas échéant, les fonctions vectorielles linéaires avec des notations analogues à celles de Gibbs. Comme un certain nombre de personnes emploient le système de Gibbs dans leurs publications, il est un peu malheureux que les auteurs aient choisi le signe $\times$ pour le produit scalaire ; cela ne peut être d'aucune utilité et ne peut que causer de la confusion, plus qu'il n'en est causé par les différences de notation actuelles. Il vaudrait peut-être mieux introduire un nouveau symbole ainsi que cela a été fait pour le produit vectoriel.

Le travail de MM. Burali-Forti et Marcolongo a certainement aplani la voie au Comité international, pour autant qu'elle peut être aplanie, et l'*Enseignement mathématique* y contribue considérablement en offrant ses colonnes à l'échange de vues. Il faut espérer que les vecteurs et l'analyse vectorielle deviendront de cette manière si familiers dans leur diversité qu'en 1912 ils pourront poursuivre leur développement sans unification et sans réforme avec la même liberté qui est accordée au Calcul différentiel et intégral.

(Traduction de M^lle R. Masson, Genève.)

5. — *Lettre de* M. Peano (Turin).

Les modifications suggérées par M. Timerding dans l'*Enseignement mathématique* du 15 mars 1909 (p. 129-134), sont très opportunes. Un bon choix de la forme et des dimensions des symboles mathématiques aide beaucoup la lecture des formules. L'écriture $\mathbf{a} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, avec un grand signe $\times$ suggère la lecture $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$, alors qu'un petit signe $\times$ suggère la lecture $\mathbf{a} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$, conforme à l'usage. En conséquence j'approuve complètement les notions $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ et $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ pour indiquer le produit scalaire et le produit vectoriel. Et j'approuve aussi la lecture par « **a** *en* **b** », et « **a** *contre* **b** », qui a l'avantage de la brièveté et de la précision. Et je suis heureux de constater que la discussion libre des notations, entreprise par l'*Enseignement mathématique*, tend à produire l'accord entre les auteurs et développe une théorie latente des notations.

Il reste deux notations concurrentes pour indiquer la valeur absolue d'un nombre ou d'un vecteur : « mod a » et « $|\, a \,|$ ». La première a l'avantage de la priorité, car elle se rencontre chez Argand (1814) et Cauchy. La deuxième est de Weierstrass (1851).

Avec la deuxième notation, dans une formule comme $|a+b|$, les signes $|\ |$ jouent le double rôle d'opération et de parenthèses, comme cela résulte de la comparaison avec la notation de Cauchy : mod $(a+b)$, où figurent explicitement l'opération « mod » et les parenthèses. Cela peut paraître un avantage de la notation moderne ; mais celle-ci peut produire des ambiguïtés lorsque les signes $|\ |$ se présentent au milieu de la formule. Ainsi la formule $|a|b+c|d|$ peut être interprétée (mod $[a \bmod (b+c)\,d]$ ou (mod a) $b+c$ (mod d).

La notation « mod a » est longue ; on peut l'abréger en ma. Si l'on indique les symboles fixes en caractère romain, et les lettres variables en italique, comme : $\log x$, $\sin(a\,;\,b)$, on ne confondra pas le symbole m (module), avec la lettre m. On pourra même revenir à la notation de Hamilton : Ta au lieu de ma. L'essentiel est d'indiquer l'idée de valeur obtenue par un symbole, et ne pas introduire un symbole $|\ |$ avec la valeur composée T ( ) de Hamilton, ou mod ( ) de Cauchy.

Pour avoir des notations claires et rigoureuses, c'est-à-dire sans ambiguïté, il faut que chaque symbole représente une seule idée, et chaque idée soit représentée par un seul symbole. Les parenthèses sont introduites en Arithmétique, pour grouper des symboles ; en conséquence on ne peut pas leur laisser une autre signification sans produire des ambiguïtés. On ne peut pas utiliser les parenthèses pour indiquer des fonctions ; on ne peut pas indiquer par (ab) et par $[ab]$ les produits des vecteurs, et en cela l'accord est maintenant général. On ne peut pas indiquer la variable par des parenthèses ; dans la formule $f(x)$, les parenthèses sont inutiles, ou insuffisantes ; il faut revenir à la notation de Lagrange fx. Le vinculum qui se représente encore dans le radical, a la valeur des parenthèses ; son élimination, en écrivant $\sqrt{}(a+b)$ au lieu de $\sqrt{a+b}$, a aussi un avantage typographique bien connu.

La ligne de division a aussi le double rôle d'indiquer l'opération division, et de fonctionner comme vinculum. Il y a une tendance, spécialement dans les livres anglais, à remplacer $\dfrac{a+b}{c}$ par $(a+b)\,/\,c$.

La remarque que dans $|a+b|$, les signes $|\ |$ remplissent sans ambiguïté au double rôle de signe d'opération et de parenthèses, est analogue à l'autre qu'on peut supprimer les parenthèses au commencement et à la fin des formules.

Ainsi l'écriture

$$a+b)\,(c+d)]^2\,(e+f$$

est aussi claire que

$$[(a+b)\,(c+d)]^2\,(e+f)\,.$$