

I GÉNÉRALITÉS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

de groupes analogues aux précédents, mais formés de faisceaux concentriques ou de ponctuelles situées sur une même base. En conséquence, nous étudierons d'abord ces cas spéciaux des groupes sus-mentionnés de la même manière que les ouvrages classiques¹ développent la théorie des faisceaux homographiques concentriques simples et des ponctuelles homographiques simples et de même base.

I

GÉNÉRALITÉS

Faisceaux homographiques concentriques du $(2 + 1)^{\text{e}}$ degré.

Nous appellerons faisceaux homographiques concentriques du $(2 + 1)^{\text{e}}$ degré deux faisceaux formant un groupe du $(2 + 1)^{\text{e}}$ degré et issus du même sommet.

Comme dans le cas général, deux de ces faisceaux seront évidemment déterminés dès que nous connaîtrons cinq paires de rayons homologues quelconques.

Divisions homographiques de même base de la $(2 + 1)^{\text{e}}$ classe.

Nous appellerons divisions ou ponctuelles homographiques de même base, de la $(2 + 1)^{\text{e}}$ classe deux ponctuelles formant un groupe de la $(2 + 1)^{\text{e}}$ classe et situées sur la même base.

Deux ponctuelles de cette nature seront déterminées également dès que nous aurons cinq paires de points homologues quelconques.

D'après les définitions que nous avons adoptées pour les groupes, il en résulte que toute transversale détermine, sur deux faisceaux concentriques ou non du $(2 + 1)^{\text{e}}$ degré, deux ponctuelles de la $(2 + 1)^{\text{e}}$ classe *de même base*. En sachant donc construire deux faisceaux concentriques de cette nature, nous pourrions en déduire, à priori, deux divisions analogues de même base et inversement. Dans ces conditions nous n'aurons qu'à développer les constructions relatives aux faisceaux sans avoir besoin d'une partie dualistique pour les divisions.

² W. FIEDLER : *Die darstellende Geometrie*. — T. REYE : *Die Geometrie der Lage*. — R. BÖGER : *Ebene Geometrie der Lage*.

A. Construction de deux faisceaux concentriques du $(2 + 1)^{\text{e}}$ degré.

Les faisceaux sont donnés par les paires, Sa ; $Sa_1 - Sb$; $Sb_1 - Sc$; $Sc_1 - Sd$; $Sd_1 - Se$; Se_1 . Il reste bien entendu que chaque rayon $a, b, c \dots$ du faisceau simple correspond à 2 rayons a_1 et $a_2 - b_1$ et $b_2 \dots$ du faisceau multiple; par contre chaque rayon de celui-ci ne correspond qu'à un du premier. (Fig. 1.)

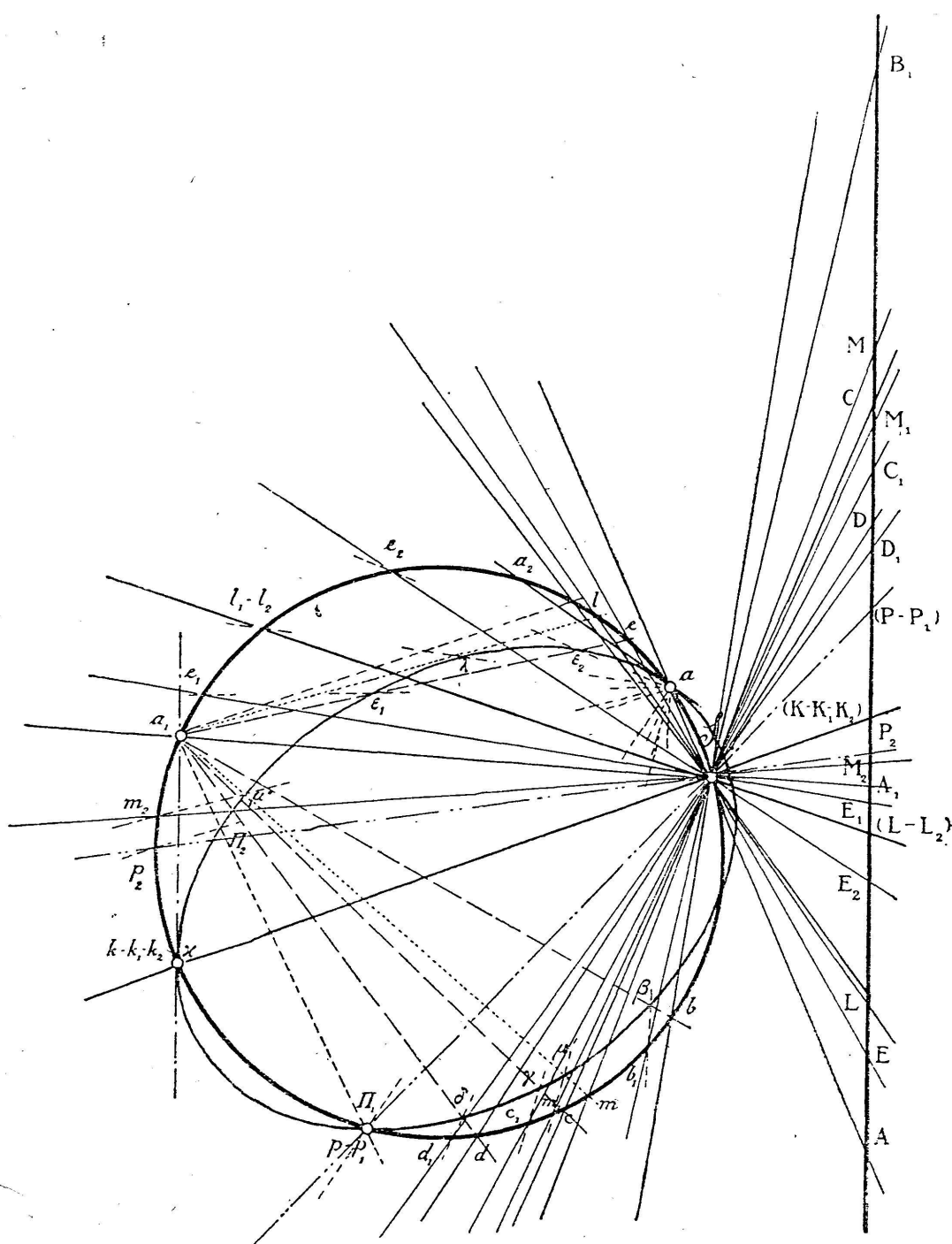


FIG. 1.

Nous coupons ensuite le groupe par une circonférence arbitraire mais passant par le sommet S. Les points de coupe des rayons avec la circonférence forment deux divisions circulaires homographiques du $(2 + 1)^{\text{e}}$ ordre. Celles-ci sont déterminées par les points : $aa_1 - bb_1 - cc_1 - dd_1$ et ee_1 . Les points de la division simple sont : $abcde$ et ceux de l'autre sont : $a_1b_1c_1d_1e_1$. Nous joignons maintenant tous les points de la division multiple avec a et tous ceux de la division simple avec a_1 . De cette manière, et dans le sens où nous avons défini les groupes du $(2 + 1)^{\text{e}}$ degré, nous obtenons deux faisceaux homographiques de sommet a et a_1 formant un groupe du $(2 + 1)^{\text{e}}$ degré, et possédant un rayon homologue commun aa_1 . D'après notre théorème, le lieu de points de coupe des rayons homologues est une conique passant par les points :

1. a sommet du faisceau multiple.
2. β point de coupe de a_1b avec ab_1 .
3. γ » » a_1c » ac_1 .
4. δ » » a_1d » ad_1 .
5. ε_1 » » a_1e » ae_1 .

Cette conique peut être entièrement construite au moyen de ces cinq points et elle nous permettra de déterminer tous les autres rayons du groupe de sommet S. Si nous voulons obtenir deux rayons conjugués quelconques Sm et Sm_1 ou Sm et Sm_2 nous menons par a_1 une transversale qui coupe la conique en μ' et μ'' . Nous joignons $a\mu'$ et $a\mu''$ qui sont les homologues de la transversale dans les faisceaux auxiliaires de sommets a et a_1 . Ces trois droites $a_1\mu'\mu'' - a\mu' - a\mu''$ déterminent respectivement sur le cercle les points m , m_1 et m_2 constituant deux paires de points conjugués des divisions circulaires. Les rayons cherchés sont ainsi Sm , Sm_1 et Sm_2 .

En faisant tourner la transversale autour de a_1 et en joignant les points de coupe sur la conique avec a nous obtenons ainsi tous les rayons des faisceaux de sommets a et a_1 . Ceux-ci déterminent à leur tour tous les points des divisions circulaires et partant tous les rayons du groupe concentrique en S du $(2 + 1)^{\text{e}}$ degré.

Si nous considérons en particulier une des paires de rayons

donnés, soit Se ; Se_1 nous voyons qu'il existe un deuxième rayon Se_2 du faisceau multiple également conjugué de Se . Pour l'obtenir menons la droite $a_1\varepsilon_1$ qui donne encore ε_2 , sur la courbe; $a\varepsilon_2$, donne e_2 sur le cercle et de celui-ci on déduit aisément Se_2 , (Fig. 1.)

Si nous avons eu des divisions à déterminer au lieu de

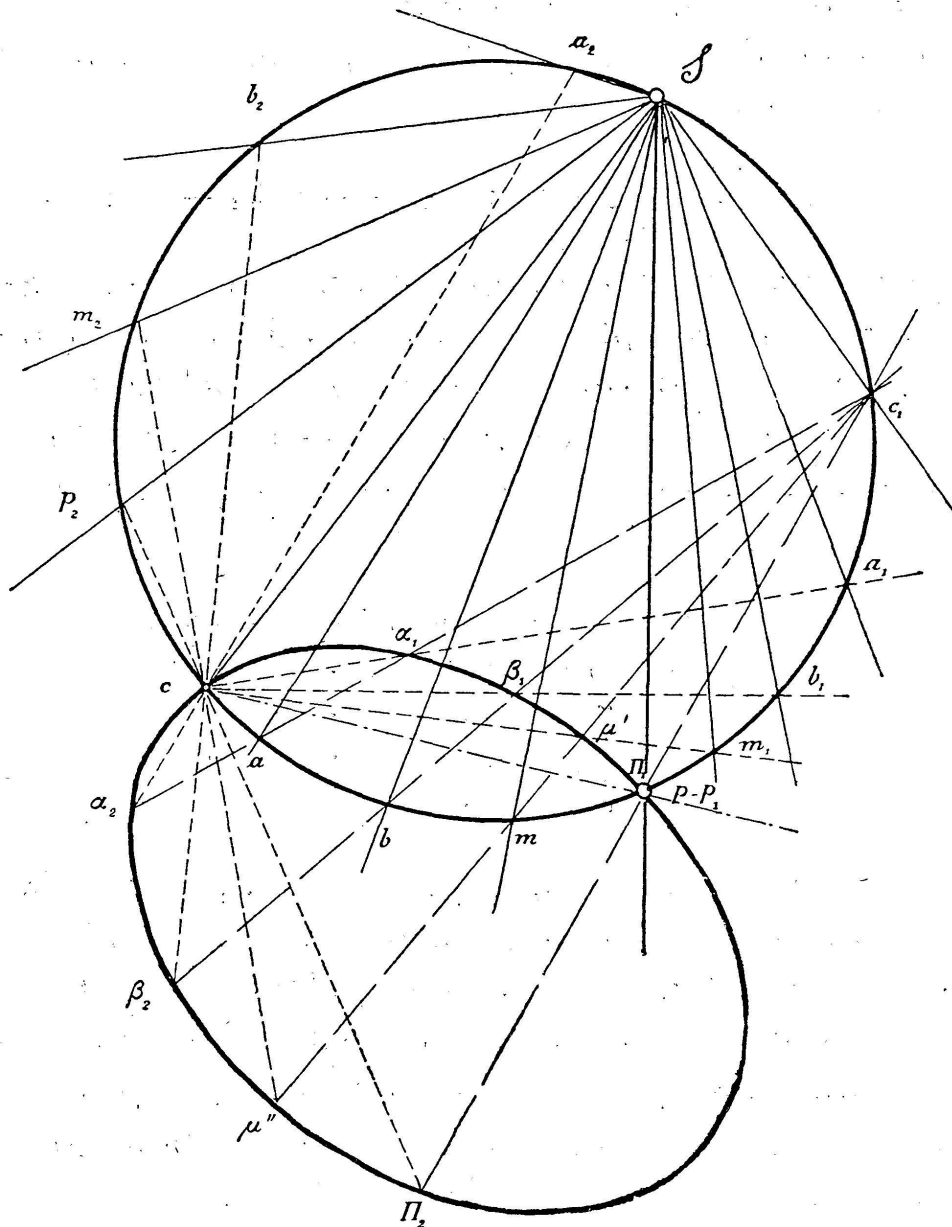


FIG. 2.

faisceaux, nous aurions joint les cinq paires de points homologues donnés $AA_1 - BB_1 - CC_1 - DD_1 - EE_1$ avec un point arbitraire S de manière à former un groupe de deux faisceaux comme les précédents. Nous aurions ensuite achevé la construction des rayons de ces faisceaux, comme il vient d'être dit, et chaque paire nouvelle de rayons homologues

aurait donné la paire correspondante de points homologues sur la base commune. (Fig. 1.)

Cas spécial. Quand les rayons donnés des faisceaux du $(2 + 1)^{\text{e}}$ degré sont tels que deux paires du faisceau multiple sont complètes avec chacune leur rayon conjugué du faisceau simple, on peut également appliquer la construction précédente, ou utiliser une autre conique.

Si nous considérons la fig. 2, les paires de rayons homologues donnés sont :

$$Sa ; Sa_1 - Sa ; Sa_2 - Sb ; Sb_1 - Sb ; Sb_2 - Sc ; Sc_1 .$$

Les paires Sa_1 et Sa_2 conjuguées à Sa , puis Sb_1 et Sb_2 conjuguées à Sb sont complètes. On peut utiliser les points c et c_1 pris sur la circonférence comme sommets des faisceaux auxiliaires et former un groupe du $(2 + 1)^{\text{e}}$ degré. Ce groupe donne naissance à une conique dont nous avons également cinq points. Ce sont :

1. c sommet du faisceau multiple.
2. α_1 sur ca_1 et c_1a .
3. α_2 » ca_2 » c_1a .
4. β_1 » cb_1 » c_1b .
5. β_2 » cb_2 » c_1b .

Les paires de rayons conjugués $Sm Sm_1$ et $Sm Sm_2$ sont ensuite déterminées comme précédemment. (Fig. 2.)

Autre construction. Nous savons également que les rayons du faisceau multiple sont liés deux à deux et qu'ils forment une involution. Nous pouvons considérer le groupe du $(2 + 1)^{\text{e}}$ degré comme formé d'un faisceau simple, homographique avec une involution du 2^{e} degré et de même sommet. En coupant le groupe par un cercle passant par S , nous pouvons rappeler que les sécantes joignant les points correspondants de l'involution circulaire ainsi obtenue, forment un faisceau concentrique de sommet P . (Fig. 3.) Chaque rayon de ce faisceau correspond à un rayon du faisceau simple en S . Nous avons ainsi deux nouveaux faisceaux homographiques simples de sommets S et P qui engendrent une conique.

Les éléments donnés sont : $Sa ; Sa_1 - Sa ; Sa_2 - Sb ; Sb_1$

— Sb ; Sb_2 — Se ; Se_1 . Les transversales a_1a_2 et b_1b_2 donnent le point P.

Le rayon Pa_1a_2 est conjugué de Sa et donne α de la conique auxiliaire.

»	Pb_1b_2	»	Sb	»	β	»	»
»	Pc_1	»	Sc	»	γ	»	»

Les points P et S sont encore deux points de cette conique, laquelle est ainsi complètement déterminée.

En laissant une sécante mobile tourner autour de P, elle donnera sur la conique un point ν et sur la circonférence les

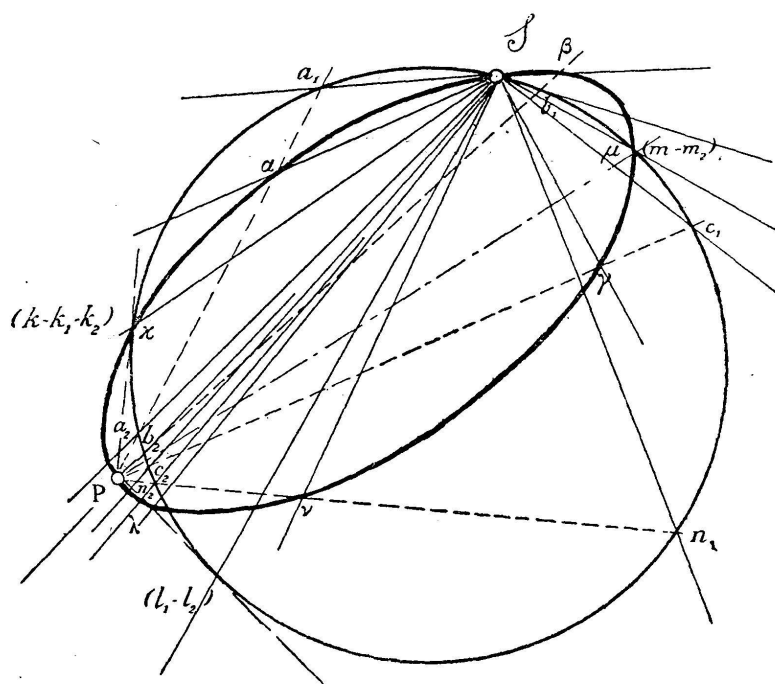


FIG. 3.

points n_1 et n_2 . Au premier correspond le rayon Sn ou $S\nu$ et aux autres les rayons Sn_1 et Sn_2 tous deux conjugués du premier. Les diverses positions de cette sécante donneront ainsi toutes les paires de rayons homologues des deux faisceaux concentriques du $(2 + 1)^{\text{e}}$ degré. Cette construction relative à des données spéciales est également applicable aux divisions du $(2 + 1)^{\text{e}}$ degré situées sur une même base.

Remarque. Les points correspondants de la division multiple circulaire comme m_1 et m_2 ou e_1 et e_2 que nous avons déjà trouvés dans la première construction forment évidemment la même involution que dans la deuxième construction

et comme pour ce dernier cas ils sont situés sur des transversales concourantes en un point P.

B. Points et rayons particuliers.

1. Rayons doubles du 2^e degré.

Nous désignerons sous ce nom les rayons Sl_1 et Sl_2 du faisceau multiple qui tombent ensemble mais qui restent différents de leur conjugué l du faisceau simple.

1. Points doubles du 2^e degré.

Nous entendons par points doubles du 2^e degré deux points comme L_1 et L_2 de la division multiple, qui sont confondus mais qui restent différents de leur homologue L de la division simple.

Dans la fig. 1 ces rayons sont donnés par les tangentes de la conique auxiliaire issues de a_1 . On joint le point de tangence λ avec a pour obtenir les points doubles correspondants de la division circulaire. Il reste à mener les rayons Sl_1 et Sl_2 issus de S par ce nouveau point. On a évidemment deux rayons de ce genre réels, imaginaires ou confondus. (Fig. 1.)

Dans la deuxième construction (fig. 3), ce sont les tangentes au cercle issues de P qui donnent les points doubles de la division circulaire. On joint ceux-ci à S et on a les rayons cherchés.

Quand il s'agit de points doubles du 2^e degré pris sur deux divisions de même base, on prolonge les rayons doubles des faisceaux concentriques correspondants menés par S jusqu'à cette base.

2. Rayons doubles du 3^e degré.

Nous appellerons rayons doubles du 3^e degré deux rayons homologues confondus tels de Sp et Sp_1 .

2. Points doubles du 3^e degré.

Les points doubles du 3^e degré sont les points formés par deux homologues P et P' confondus.

Pour obtenir ces rayons, considérons dans la fig. 1, un des points de coupe de la conique avec le cercle et désignons le par π_1 . La transversale $a_1\pi_1$ donne également deux rayons

par a soit $a\pi_1$ et $a\pi_2$. Sur le cercle $a_1\pi_1$ donne p , $a\pi_1$ donne p_1 et $a\pi_2$ donne p_2 . Comme π_1 est déjà sur le cercle p et p_1 seront donc confondus avec π_1 . Les rayons passant par S seront Sp , Sp_1 et Sp_2 , les deux derniers étant les homologues du premier. Les rayons homologues Sp et Sp_1 seront donc confondus tandis que Sp_2 ne donne rien de particulier.

Le nombre des rayons doubles du 3^e degré dépend ainsi du nombre des points de coupe des deux courbes en dehors du point a qui est le sommet du faisceau multiple auxiliaire.

Nous avons donc trois points de coupe possibles différents de a dont deux peuvent être imaginaires. Il en résulte ainsi : *Les faisceaux concentriques formant un groupe du $(2 + 1)^e$ degré ont trois rayons doubles du 3^e degré dont deux peuvent être réels, imaginaires ou confondus.*

La conique auxiliaire utilisée dans la première figure dépend de deux faisceaux de sommets a et a_1 . Il est aisé de voir qu'elle est tangente au rayon aa_2 en a . Si l'on avait pris les sommets des faisceaux auxiliaires en a et a_2 , la nouvelle conique eût été tangente au rayon aa_1 en a . D'un autre côté les points doubles du 3^e degré sur le cercle sont des points fixes de celui-ci. *Ils appartiendront ainsi à toutes les coniques auxiliaires.* Les deux coniques correspondant aux faisceaux de sommets a et a_1 ou a et a_2 passeront par ces trois points et par le point a .

Les sommets des faisceaux auxiliaires peuvent être deux points homologues quelconques x et x_1 . D'après ce qui précède la conique correspondante passera par les trois points doubles et par le point x .

On passe des rayons doubles du 3^e degré, aux points doubles de même nature des divisions situées sur une même base, en prolongeant les rayons en question jusqu'à cette base.

Dans la figure 3, toute transversale $P\mu$ passant par un point de coupe de la conique et du cercle donne sur le cercle les points m_1 et m_2 tels que m_2 est confondu avec μ . D'autre part $S\mu$ donne également m sur le cercle confondu avec μ ou m_2 . Donc les rayons homologues Sm et Sm_2 sont confondus et constituent une paire de rayons doubles du 3^e degré. En dehors du point S , les deux courbes ont encore trois points

communs. Donc cette construction nous montre également que les faisceaux homographiques concentriques du $(2 + 1)^e$ degré ont trois rayons doubles du $(2 + 1)^e$ degré, dont deux peuvent être imaginaires.

Dans la fig. 3 nous avons considéré la conique auxiliaire comme provenant de deux faisceaux simples, un de sommet P et l'autre de sommet S. Nous aurions pu prendre ce deuxième sommet en un point quelconque du cercle a_1 , a_2 , etc. appartenant à la division circulaire multiple. La conique auxiliaire eût passé par les trois points doubles du 3^e degré des divisions circulaires par P et par a_1 . Toutes les coniques ainsi formées auraient constitué un faisceau de coniques dont les quatre points fixes auraient été les trois points doubles en question et le point P.

3. Rayons triples.

Les rayons triples de deux faisceaux homographiques concentriques, du $(2 + 1)^e$ degré sont formés par un rayon du faisceau simple confondus avec ses deux homologues du faisceau multiple.

Exemple : Sk confondu avec Sk_1 et Sk_2 .

3. Points triples.

Les points triples de deux divisions homographiques de même base de la $(2 + 1)^e$ classe sont formés par un point de la division simple confondu avec ses deux homologues de la division multiple.

Exemple : K confondu avec K_1 et K_2 .

Ce cas sera réalisé dans la première construction (fig. 1) quand la transversale issue de a_1 et passant par un des points de coupe de la conique avec le cercle sera en même temps une tangente de la conique. Les points conjugués kk_1 et kk_2 des divisions circulaires seront tous confondus au point de coupe z des deux courbes. La droite Sz donnera ainsi le rayon triple. On peut avoir 0, 1 ou 2 rayons triples suivant que les tangentes de la conique issues du point a_1 , ne passent pas, passent par un point de coupe des deux courbes ou passent par deux points de coupe de ces courbes.

Dans la fig. 3. le rayon triple sera donné par une transversale issue de P passant par un des points de coupe des deux courbes et en même temps tangente au cercle.

4. Rayons rectangulaires conjugués.

Etant donné deux faisceaux homographiques concentriques du $(2 + 1)^{\text{e}}$ degré, nous appellerons rayons rectangulaires conjugués des rayons tels que Sm et Sm_1 qui sont homologues tout en étant perpendiculaires l'un à l'autre. Le deuxième rayon conjugué de Sm soit Sm_2 dépend des deux autres sans présenter de propriétés spéciales.

Pour obtenir ces rayons par la première méthode de construction nous observons que les solutions cherchées Sm et Sm_1 dépendent de rayons a_1m et am_1 passant par les extrémités d'un diamètre mm_1 . Leur recherche dépend maintenant du problème suivant :

Problème : Etant donné deux points fixes d'un cercle a et a_1 et un diamètre mobile de celui-ci, déterminer le lieu géométrique des points de coupe des rayons joignant les extrémités du diamètre aux points fixes donnés.

Solution : Dans la fig. 4 considérons le diamètre xy ; il donne les droites xa_1 et ya ; après une demi-révolution y vient en x et vice-versa ; le rayon ya donne xa et xa_1 donne ya_1 . Dans ce cas les rayons ya_1 et ax ne sont pas à considérer sur le diamètre xy mais bien sur un nouveau diamètre obtenu après une demi-révolution.

Dans ces conditions à tout diamètre xy ne correspondent que deux droites conjuguées xa_1 et ya . Si xy tourne autour du centre de manière à ce que x décrive toute la circonférence xa_1 et ya engendreront deux faisceaux homographiques simples de sommet aa_1 et les points de coupe de ces rayons se trouveront sur une conique passant par a et a_1 . Nous déterminons la nature de cette conique en observant que deux rayons du faisceau a comme ax et am_1 correspondent dans le faisceau a_1 à a_1y et a_1m et donnent :

$$\sphericalangle xa m_1 = \frac{1}{2} \text{ arc } xm_1 = \frac{1}{2} \sphericalangle xom_1$$

$$\sphericalangle ya_1 m = \frac{1}{2} \text{ arc } ym = \frac{1}{2} \sphericalangle yom$$

Ces angles sont égaux; donc les angles compris entre les rayons homologues correspondants des deux faisceaux sont égaux. Nous avons des faisceaux homographiques égaux; donc la conique qu'ils engendrent est un cercle passant par a et a_1 . D'un autre côté il est aisé de voir que ce cercle est tangent aux rayons oa_1 et oa . Il en résulte maintenant que, ce cercle est complètement déterminé.

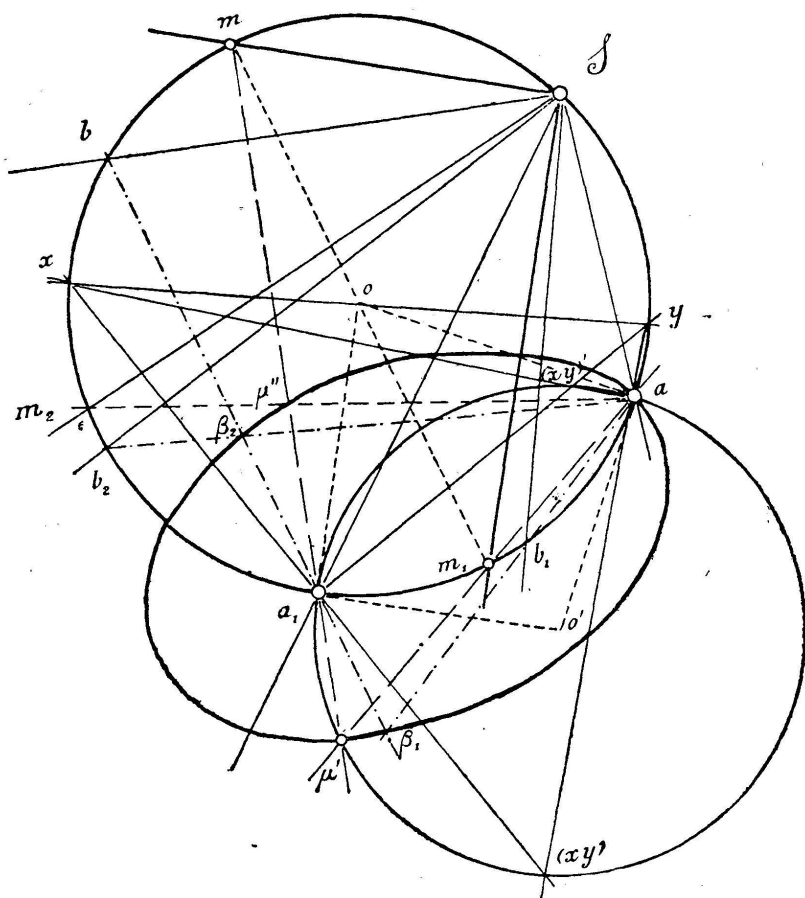


FIG. 4.

Si nous considérons de nouveau les faisceaux du $(2 + 1)^e$ degré en a et a_1 ils donneront des rayons homologues passant par les extrémités d'un même diamètre quand les points de coupe de ceux-ci seront à la fois sur le cercle nouveau et sur la conique auxiliaire.

Les rayons a_1m et am_1 correspondant aux rayons cherchés Sm et Sm_1 , sont à la fois des rayons homologues des faisceaux homographiques égaux qui engendrent le deuxième cercle, et des rayons homologues des faisceaux du $(2 + 1)^e$ degré engendrant la conique. Il faut donc que leur point

d'intersection soit un point de coupe de ces deux courbes. En dehors de a ces courbes ont trois points de coupe dont deux peuvent être imaginaires. A ces trois points correspondent donc trois paires de points conjugués des divisions circulaires tels que les deux points d'une même paire sont sur un même diamètre. Ces points donnent à leur tour avec S les paires de rayons homologues rectangulaires des faisceaux concentriques en S .

Les faisceaux homographiques concentriques du $(2 + 1)^e$ degré ont donc trois paires de rayons rectangulaires conjugués dont deux peuvent être imaginaires.

Constructivement on joint le point de coupe μ_1 des courbes avec a et a_1 . On a $a_1\mu_1$ et $a\mu_1$. La première droite donne μ'' sur la conique et m sur le premier cercle. La seconde droite donne m_1 sur le même cercle ; m et m_1 sont conjugués dans les divisions circulaires et appartiennent à un même diamètre. Ils donnent évidemment Sm perpendiculaire à Sm_1 . Le deuxième rayon conjugué de Sm soit de Sm_2 se déduit de μ'' avec $a\mu''$ (fig. 4).

Avec la deuxième méthode de construction, les paires de rayons rectangulaires conjugués étant liées à un diamètre du cercle primitif, nous pouvons voir que les extrémités d'un diamètre, jointes à S et P engendrent deux faisceaux homographiques de sommets S et P et forment un groupe du $(2 + 1)^e$ degré. Le faisceau multiple a comme sommet S et le faisceau simple P . La courbe correspondante est une courbe du 3^e degré avec S comme point double et P comme point simple. Cette courbe aura encore trois points de coupe différents de S et de P avec la conique. De chacun de ces points on pourra donc en déduire une paire de rayons homologues rectangulaires des faisceaux concentriques en S . On arrive donc à la même conclusion qu'avec la méthode précédente.

5. Points limites.

Nous appellerons points limites de deux divisions homographiques de même base et de la $(2 + 1)^e$ classe les points conjugués du point à l'infini de la division simple ou le

point conjugué et le point lié du point de la division multiple situé à l'_∞ .

Pour obtenir ces points, considérons les divisions déterminées suivant la méthode de la figure 1. (Voir fig. 5).

Nous prenons Sl parallèle à la base. Le rayon $a_1 l$ donne λ' et λ'' , sur la conique, auxquels correspondent $a_1 l_1$ et $a_1 l_2$.

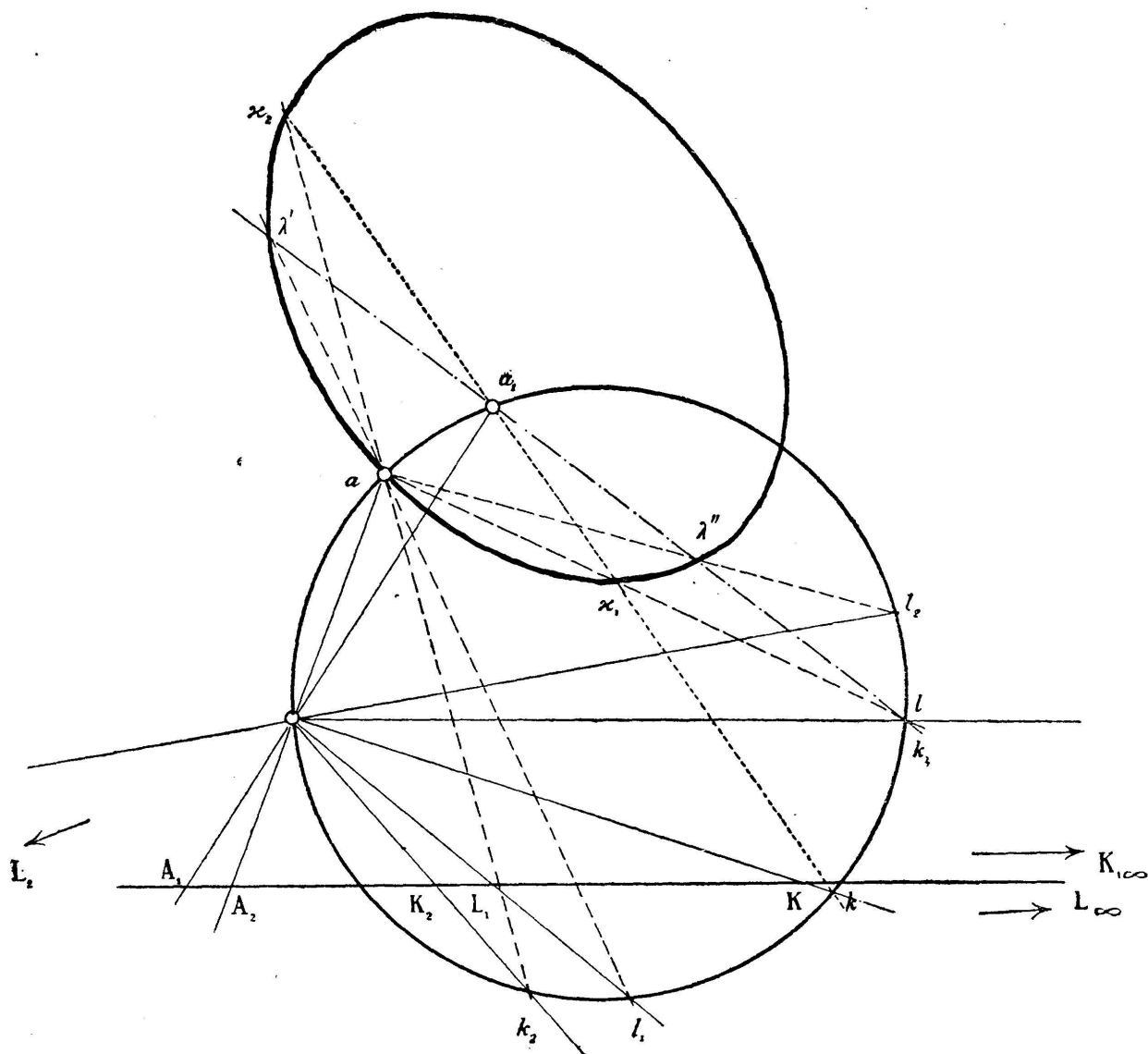


FIG. 5.

Les rayons Sl_1 et Sl_2 donnent L_1 et L_2 sur la base comme points conjugués de L_∞ .

L_1 et L_2 forment un premier groupe de points limites. La parallèle précédente peut s'appeler Sk_1 ; le rayon ak_1 donne x_1 sur la conique, puis $a_1 x_1$ donne x_2 , sur la conique également et k sur le cercle; la droite ax_2 , donne k_2 sur le cercle.

Les rayon Sk et Sk_1 puis Sk et k_2 sont conjugués. Ils donnent sur la base :

K conjugué de $K_{1\infty}$

K_2 » de K et lié à $K_{1\infty}$

K et K_2 forment le 2^e groupe de points limites.

C. Remarque sur les divisions du $(2 + 1)^{\text{e}}$ degré, de même base.

On peut cependant développer les divisions homographiques du $(2 + 1)^{\text{e}}$ degré situées sur une même base, sans avoir besoin des faisceaux de même nature. Ce développement constitue la dualité du précédent et nous le résumons ici pour éviter d'allonger ce travail tout en voulant être aussi complet que possible. Chaque construction suppose évidemment une dualité.

Première construction. Nous donnerons les divisions au moyen des cinq paires d'éléments conjugués, aa_1 ; aa_2 ; bb_1 ; cc_1 et dd_1 . Nous construirons ensuite un cercle quelconque tangent à la base xy , et par chaque point donné nous tracerons les tangentes de cercle. Toutes ces tangentes couperont d'abord la tangente b suivant une division double, puis la tangente conjuguée b_1 suivant une division simple, homographique avec la première. Les tangentes issues de $a_1 a_2 b_1 c_1 \dots$ coupent b et celles issues de $abcd \dots$ coupent b_1 . Ces deux nouvelles divisions ; $\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$ et $\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \gamma_1 \dots$ forment un groupe de $(2 + 1)^{\text{e}}$ classe avec un point homologue commun $\beta\beta_1$. Elles engendrent donc une conique que nous pouvons construire et qui est déterminée par cinq tangentes. Par tout point μ de b_1 on a deux tangentes de la conique donnant les points homologues μ_1 et μ_2 sur b . Par ces trois points, les tangentes du cercle donneront les trois points homologues des deux divisions sur xy , soient m , m_1 et m_2 .

Les points doubles du deuxième degré seront évidemment donnés par les points de coupe de la base simple b_1 avec la conique auxiliaire. Ils peuvent être imaginaires.

Les points doubles du troisième degré proviendront des tangentes communes des deux courbes. Il y en a trois en dehors de b . Deux peuvent être imaginaires. *Toutes les coniques auxiliaires admettent ces trois tangentes du premier cercle comme tangentes communes.*

On obtiendra un point triple quand une tangente commune des courbes sera tangente à la conique par son point de coupe avec la base b_1 .

Les points limites conjugués du point de l'infini de la division simple proviendront de la tangente du cercle parallèle

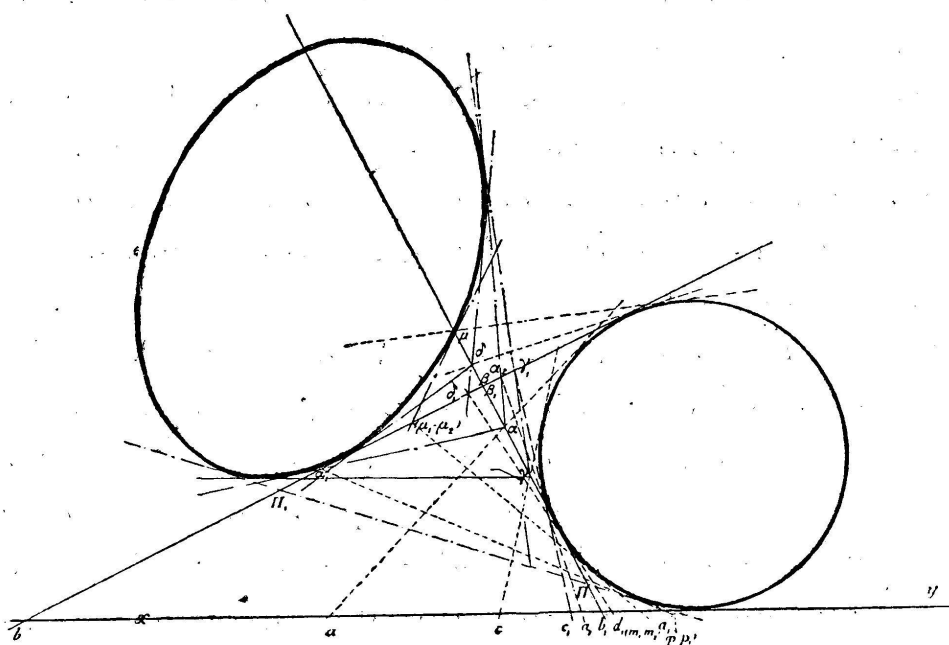


FIG. 6.

à xy et de son point de coupe avec b_1 . Le point de coupe de cette même tangente avec b entraînera les points conjugués du point de l'infini sur la base double. (Voir fig. 6).

Deuxième construction. Celle-ci correspond au cas spécial où les éléments donnés peuvent se représenter par aa_1 ; aa_2 ; bb_1 ; bb_2 ; cc_1 . On prend un cercle tangent à la base xy . Les tangentes issues par les paires a_1a_2 ; b_1b_2 se coupent en α et β sur une droite qui contiendra les points de coupe des paires de tangentes analogues. La ponctuelle $\alpha\beta\gamma$ sur cette droite est homographique avec abc et elle détermine une conique également tangente à xy . On peut

déduire les points des divisions sur xy au moyen des tangentes de cette conique. (Voir fig. 7).

Les points doubles du deuxième degré proviennent ici des points de coupe de $\alpha\beta$ avec le cercle. Ceux du troisième degré sont donnés par les tangentes communes en dehors de

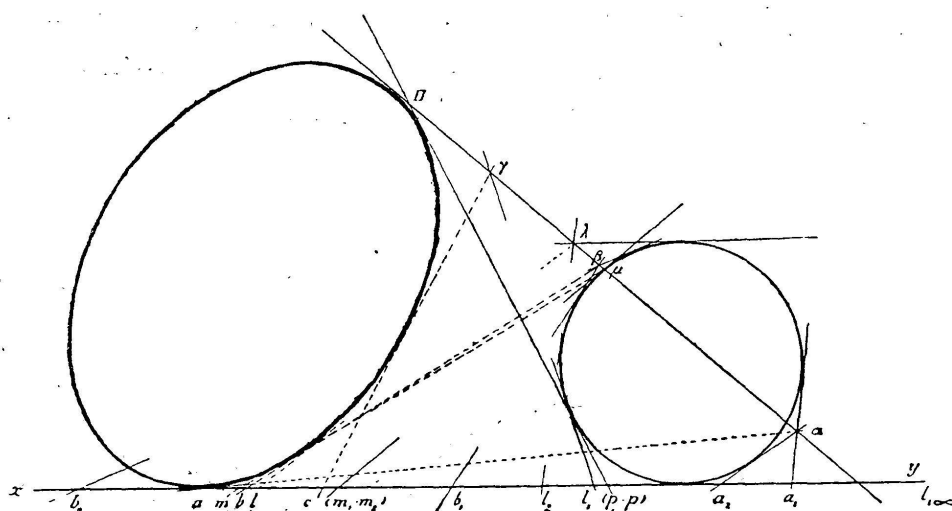


FIG. 7.

xy . Toutes les coniques auxiliaires admettent quatre tangentes communes. Ce sont les trois sus-indiquées et la ligne $\alpha\beta$.

Les points triples et les points limites se trouvent d'une manière analogue à celle de la construction précédente.

II

TANGENTES ET SÉCANTES

Nous considérons une courbe du 3^e degré donnée par un faisceau multiple S_2 et un faisceau simple S_1 constituant un groupe du $(2 + 1)^e$ degré.

Pour construire la courbe nous nous reportons à ce que nous avons écrit précédemment (*Ens. math.*, 15 nov. 06). Les faisceaux sont donnés par cinq

Nous prenons également une courbe de la 3^e classe formée par une division double et une division simple constituant ensemble un groupe de la $(2 + 1)^e$ classe.

Pour construire cette courbe suivant la méthode que nous avons déjà exposée, nous considérerons les cinq paires de