Première partie.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **10 (1908)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

de la forme $3\mu \pm 1$, on aura, pour l'une des valeurs de x

$$x \equiv \frac{y_{\mu+1}}{y_\mu}, \qquad \text{ou} \qquad x \equiv ab\frac{y_{\mu-1}}{y_\mu} \equiv \frac{y_{2\mu}}{y_{2\mu-1}} .$$

Toutes ces propriétés peuvent être facilement contrôlées au moyen des formules de triplication (6) et (7) et des théorèmes de divisibilité énoncés §§ 3.

Soit, comme exemple, à résoudre la congruence

$$x^3 + 3x - 1 \equiv 0 . \qquad \pmod{47}$$

La récurrence auxiliaire est toujours [1, 1], et son discriminant 5 est non-résidu de 47. De plus $y_{16} = 987 = 21 \times 47$. La congruence proposée a donc trois racines ; l'une d'elles sera

$$x \equiv \frac{y_6}{y_5} \equiv \frac{8}{5} \equiv 11 ;$$

les autres sont 41 et 42.

C. Cailler (Genève).

SUR LE 5me LIVRE DE GÉOMÉTRIE

Première partie.

1. — L'article intitulé « Parallélisme et translation rectiligne », publié dans le numéro du 15 septembre 1907 de la Revue *L'Enseignement mathématique* (pp. 367-381), impose de nouvelles définitions pour le parallélisme de droites et de plans et par suite un nouveau procédé de démonstration des propriétés qui les concernent. Nous nous bornerons à énoncer simplement les propositions dont la démonstration est devenue classique et surtout celles qui sont relatives à la perpendicularité d'une droite et d'un plan.

On est convenu d'appeler *surface plane* ou *plan* une surface telle que si on y marque deux points à volonté, la droite qui les joint est toute entière sur la surface.

On démontre qu'un plan est déterminé de position :

1° par deux droites qui se coupent ;

2° par trois points qui ne sont pas en ligne droite ;

3° par une droite et un point extérieur à cette droite ;

4° par deux droites parallèles.

Nous rappelons également les deux propositions suivantes :

1° L'intersection de deux plans qui se coupent est une ligne droite ;

2° Par un point pris hors d'une droite on peut lui mener une parallèle et une seule.

Ces préliminaires posés nous continuerons comme il suit.

I. Droites parallèles. Angle de deux droites.

2. — Théorème I. Si par deux droites parallèles AX et BY on fait passer deux plans P et Q se coupant suivant une droite CZ, cette droite est parallèle à chacune des deux autres.

Démonstration. Désignons par R (fig. 1) le plan des deux parallèles AX et BY : il forme avec les deux autres une figure invariable. Concevons qu'on lui fasse subir une translation *rectiligne* de directrice AX ; si on assujettit le plan R à glisser sur lui-même, chacun des plans P et Q glissera également sur lui-même. Quand le point A de AX aura décrit sur cette droite un segment $AA' = l$, le point B de BY, parallèle à AX, aura décrit sur cette droite un segment $BB' = AA' = l$. Le point C de CZ aura décrit dans le plan P un segment de droite égal et parallèle à AA' et dans le plan Q un segment de droite égal et parallèle à BB' ; or le point C a effectué un trajet *unique* qui appartient à chacun des plans P et Q ; il a donc décrit sur leur intersection CZ un segment $CC' = l$ parallèle à la fois à AX et à BY. Donc l'intersection CZ des deux plans P et Q est parallèle à chacune de ces droites.

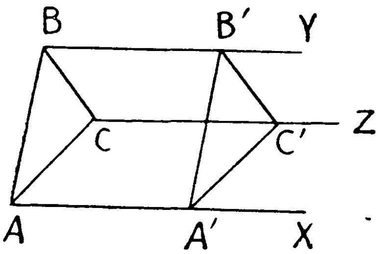

Fig. 1

C. Q. F. D.

Corollaire. Si, dans l'espace, deux droites BY et CZ sont respectivement parallèles à une 3e droite AX, ces droites sont parallèles entre elles.

Démonstration. Un point C de la droite CZ (fig. 1) détermine avec AX un plan P et avec BY un plan Q lesquels se coupent suivant une droite Δ passant par le point C ; or cette droite est parallèle à AX et à BY ; mais par le point C on ne peut mener qu'une seule parallèle à AX ; donc la droite Δ se confond avec CZ et par conséquent les droites BY et CZ sont parallèles. C. Q. F. D.

Remarque. Ce théorème fournit la démonstration classique bien connue du théorème suivant :

Théorème ii. Si deux angles ont leurs côtés parallèles 2 à 2 et de même sens, ces angles sont égaux.

Supposons que les deux angles ACB, A′C′B′ (fig. 1) répondent à la question, on peut aussi démontrer le théorème comme il suit :

Les deux côtés parallèles CA et C′A′ déterminent un plan P ; de même les côtés parallèles CB et C′B′ déterminent un plan Q, ces deux plans se coupent suivant une droite CC′. Cela posé, concevons que l'on fasse subir à l'angle ACB une translation rectiligne égale et parallèle à CC′ ; si on assujettit le plan P à glisser sur lui-même, le plan Q glissera également sur lui-même et les droites CA et CB viendront simultanément coïncider avec leurs parallèles respectives C′A′ et C′B′ ; dès lors l'angle ACB coïncidera avec l'angle A′C′B′, donc ces angles sont égaux. C. Q. F. D.

Angle de deux droites non situées dans le même plan.

3. — Définition. Si deux droites orientées D et D′ ne sont pas dans le même plan, on appelle angle de ces droites *l'angle plan* que l'on obtient en menant par un point O de l'espace deux demi-droites D_1 et D'_1 (fig. 2) respectivement parallèles aux deux premières et de même sens. Si on recommence la même construction pour un autre point O′ les nouvelles demi-droites, respectivement parallèles à D et à D′ le seront également

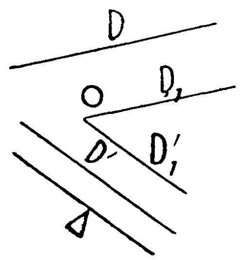

Fig. 2

à D_1 et à D'_1. On aura donc deux angles plans ayant leurs côtés parallèles 2 à 2 et de même sens et par conséquent ces angles seront égaux. Le point O peut donc être choisi arbitrairement et au besoin sur l'une des droites données. La définition qui précède est donc ainsi complètement justifiée.

Si l'angle plan ainsi formé est droit, on dit que les deux droites D et D' sont *perpendiculaires* ou bien *orthogonales*.

Il est bon d'observer que si une droite D est orthogonale à une droite D', elle l'est également à toute parallèle Δ à la droite D', car la parallèle à Δ par le point O est parallèle à D' et se confond par conséquent avec D'_1.

II. Perpendicularité d'une droite et d'un plan.

4. — Les propositions qui font l'objet de ce paragraphe, le plus important du 5me livre, sont établies d'une façon très simple et en même temps très générale grâce à l'emploi de l'angle de deux droites, dans les *Eléments de Géométrie* de H. Bos et A. Rebière, publiés en 1881 par la Librairie Hachette et Cie.

Nous utiliserons dans ce qui va suivre les propositions suivantes:

1° Si une droite D est perpendiculaire à un plan P, toute parallèle D' à D est aussi perpendiculaire au même plan.

En effet puisque la droite D est orthogonale à une droite quelconque du plan P, il en est de même de sa parallèle D', donc la droite D' est perpendiculaire au plan P.

2° Si deux droites D et D' sont parallèles, tout plan P perpendiculaire à l'une est aussi perpendiculaire à l'autre. Cette proposition est une conséquence de la précédente.

3° Réciproquement: Si deux droites D et D' sont perpendiculaires à un même plan P, ces droites sont parallèles.

Si par un point M de D' on mène la parallèle à D, elle sera perpendiculaire au plan P ; donc elle se confondra avec D' et par conséquent D' est parallèle à D. — C. Q. F. D.

4° Enfin nous utiliserons également le *théorème des 3 perpendiculaires*.