MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Une page élémentaire de Lagrange.

Dans son petit volume *Théorie et Usage de la Règle à Calculs*, dont l'*Enseignement Mathématique* publie un compte rendu dans ce même numéro, M. P. Rozé a reproduit une page de Lagrange, extraite de ses conférences aux élèves des Ecoles Normales et empruntée à ses *Oeuvres complètes* (t. VII, p. 200). Il s'agit de l'approximation dans la multiplication des nombres décimaux. Les observations du grand géomètre sont trop justes, et elles pourraient avoir une trop heureuse influence sur l'enseignement si elles étaient entendues, pour que nous hésitions à les mettre sous les yeux de nos lecteurs.

La Rédaction.

Lorsqu'on a un nombre entier avec des décimales à multiplier par un nombre entier avec des décimales, la règle générale est de regarder les deux nombres comme des nombres entiers, ensuite de retrancher, de droite à gauche, dans le produit, autant de chiffres qu'il y a de décimales dans les deux nombres ; mais cette règle a souvent, dans la pratique, l'inconvénient d'allonger l'opération plus qu'il ne faut; car, quand on a des nombres qui contiennent des décimales, ces nombres ne sont ordinairement exacts que jusqu'à un certain rang de décimales; aussi l'on ne doit conserver dans le produit que les parties décimales du même ordre. Par exemple, si le multiplicande et le multiplicateur contiennent chacun deux rangs de décimales et n'ont que ce degré de précision, on aurait, par la méthode ordinaire, quatre rangs de décimales dans leur produit; par conséquent il faudrait négliger les deux dernières comme inutiles, et même comme inexactes. Voici comment on peut s'y prendre pour n'avoir dans le produit qu'autant de décimales que l'on veut.

J'observe d'abord que, dans la manière ordinaire de faire la multiplication, on commence par les unités du multiplicateur, qu'on multiplie par celles du multiplicande, et ainsi de suite. Mais rien n'oblige à commencer par la droite du multiplicateur, on peut également commencer par la gauche; et, à dire vrai, je ne sais pas pourquoi on ne préfère pas cette manière qui aurait l'avantage de donner tout de suite les chiffres de la plus grande valeur; car, ordinairement dans la multiplication des grands nombres, ce qui intéresse le plus, ce sont les derniers rangs de chiffres; souvent même on ne fait la multiplication que pour connaître quelques-uns des chiffres des derniers rangs: et c'est là, pour le dire en passant, un des grands avantages du calcul par les logarithmes, lesquels donnent toujours, dans les multiplications comme dans les divisions, ainsi que dans l'élévation aux puissances et dans l'extraction des racines, les chiffres suivant l'ordre de leur rang, à commencer par le plus élevé, c'est-à-dire en allant de gauche à droite.

En faisant la multiplication de cette manière, il n'y aura proprement d'autre différence dans le produit, si ce n'est que l'on aura pour première ligne celle qui aurait été la dernière, suivant la méthode ordinaire, pour seconde ligne celle qui aurait été l'avant-dernière, et ainsi des autres.

Cela peut être indifférent lorsqu'il s'agit de nombres entiers et qu'on veut avoir le produit exact ; mais, lorsqu'il y a des parties décimales, l'essentiel est d'avoir dans le produit les chiffres des nombres entiers, et de descendre ensuite successivement à ceux des nombres décimaux ; au lieu que, suivant le procédé ordinaire, on commence par les derniers chiffres décimaux, et l'on remonte successivement aux chiffres des nombres entiers.

Pour faire usage de cette méthode, on écrira le multiplicateur au dessous du multiplicande, de manière que le chiffre des unités du multiplicateur soit au-dessous du dernier chiffre du multiplicande. Ensuite on commencera par le dernier chiffre à gauche du multiplicateur, qu'on multipliera comme à l'ordinaire par tous ceux du multiplicande, en commençant par le dernier à droite, et en allant successivement vers la gauche ; et l'on observera de poser le premier chiffre de ce produit au-dessous du chiffre du multiplicateur et les autres successivement à gauche de celui-ci. On continuera de même pour le second chiffre du multiplicateur, en posant également au-dessous de ce chiffre le premier chiffre du produit, et ainsi de suite. La place de la virgule, dans ces différents produits, sera la même que dans le multiplicande, c'est-à-dire que les unités des produits se trouvent toutes dans une même ligne verticale avec celles du multiplicande; par conséquent, celles de la somme de tous les produits ou du produit total seront encore dans la même ligne. Ainsi il sera aisé de ne calculer qu'autant de décimales qu'on voudra. Voici un exemple de cette opération, où le multiplicande est 437,25 et le multiplicateur est 27,34 :

437,	25
27,	34
8745	0
3060	75
131	175
17	4900
11954	4150

J'ai écrit dans le produit toutes les décimales ; mais il est aisé de voir comment on peut se dispenser de tenir compte de celles que l'on veut négliger. La ligne verticale est pour marquer plus distinctement la place de la virgule.

Cette règle me paraît plus naturelle et plus simple que celle qui est attribuée à Oughtred, et qui consiste à écrire le multiplicateur dans un ordre renversé.

Sur la théorie des parallèles.

Je lis dans l'*Enseignement mathématique* (n° du 15 septembre 1907) une manière intéressante de faire la théorie des parallèles en géométrie élémentaire.

En voici une autre : je ne prétends pas qu'elle soit la meilleure. Je la donne pour ce qu'elle vaut.

I° Axiome de Similitude. Soit une figure F. composée de n points $A_1 A_2 \dots A_n$. Une figure G composée de n points $B_1 B_2 \dots B_n$. Les figures F et G seront dites semblables si le rapport $\frac{A_i A_k}{B_i B_k}$ est le même quels que soient i et k. Ce rapport sera dit rapport de similitude. L'axiome consiste en ceci : *La figure F étant donnée ainsi que le rapport de similitude la figure G existe toujours.*

Cet axiome paraît compliqué. Il n'est cependant que l'expression précisée de cette vérité banale. Si tout grandissait proportionnellement il n'y aurait aucun moyen de s'en apercevoir. Pour que toutes choses puissent grandir proportionnellement, il faut que l'axiome soit vrai.

II° Théorème. *Dans deux figures semblables à une droite correspond une droite à un plan un plan.*

Soient $A_1 A_2 A_3$ 3 points en ligne droite ; on aura :

$$A_1 A_2 + A_2 A_3 = A_1 A_3$$

et en remplaçant les longueurs figurant dant cette égalité par des longueurs proportionnelles.

$$B_1 B_2 + B_2 B_3 = B_1 B_3 .$$

Donc $B_1 B_2 B_3$ sont en ligne droite.

Soit maintenant P un plan, il est engendré par une droite $A_1 A_2$ dont deux points $A_1 A_2$ décrivent des droites X, Y. La surface correspondante sera engendrée par la droite $B_1 B_2$, les points $B_1 B_2$ décrivant les droites correspondantes à X, Y. Dailleurs X,Y concourant en un point A_3, les droites correspondantes concourent en B_3. La droite $B_1 B_2$ engendre donc un plan.

III° Théorème. *A une sphère correspond une sphère à un cercle un cercle.*

Car à des rayons égaux correspondent des rayons égaux.

IV°. *A un polygone régulier correspond un polygone régulier.* Un polygone régulier est une figure ayant tous ses côtés égaux et tous ses sommets sur un même cercle. Ces propriétés subsistent évidemment dans la figure semblable.

V°. *A un angle correspond un angle égal.*

L'angle au centre d'un polygone régulier de n côtés est la n^{me} partie de quatre angle droits, ou $\frac{4}{n}$; dans la figure correspondante, d'après le théorème précédant il lui correspond l'angle au centre du polygone régulier correspondant, c'est-à-dire $\frac{4}{n}$. Si nous prenons dans la 1re figure k fois l'angle au centre ou $\frac{4}{n}$, il lui correspondra dans la seconde figure k fois l'angle au centre ou $\frac{4k}{n}$. Le théorème est donc démontré dans le cas où l'angle est commensurable avec l'angle droit. Dans le cas contraire on démontrera que deux angles correspondants ont même valeur approchée à $\frac{1}{n}$ près. (L'angle droit étant l'unité).

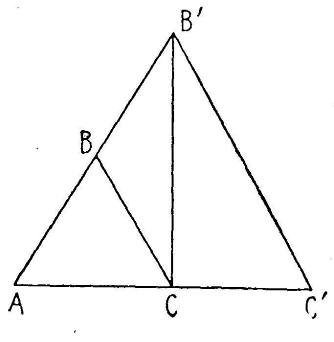
VI°. *La somme des angles d'un triangle ne peut surpasser deux droits.* (Démonstration connue).

VII°. *Si la somme des angles d'un certain triangle vaut deux droits, il en est de même pour tout autre triangle.* (Démonstration connue).

VIII°. *La somme des angles d'un triangle est égale à deux droits*

Deux triangles semblables ont les mêmes angles, on peut donc les placer de façon qu'ils aient un angle commun. Soient ABC, AB′C′ ces deux triangles. Si AB $<$ AB′ on aura aussi AC $<$ AC′. Joignons B′C.

La somme S des angles du triangle ABC, plus la somme Σ des angles du triangle BCB′, cela fait la somme T des angles du triangle ACB′ plus la somme des deux angles réunis en B qui vaut 2 droits



$$S + \Sigma = T + 2 .$$

De même la somme T des angles du triangle ACB′, plus la somme U des angles du triangle $B'CC'$ vaut deux droits plus la somme S des angles du triangle $AB'C'$

$$T + U = S + 2 .$$

en ajoutant ces deux égalités on a

$$\Sigma + U = 4 .$$

comme ni Σ ni U ne peuvent surpasser deux droits on a $\Sigma = 2$, $U = 2$. Il existe donc des triangles dont la somme des angles vaut deux droits ce qui d'après le théorème précédent suffit.

On pourrait éviter l'intervention du théorème VII, en montrant que dans la figure du théorème VIII, on peut faire le triangle BCB' égal à un triangle donné quelconque.

J. Richard (Dijon).

A propos d'un théorème relatif au triangle.

Le n° 12 du 15 mars 1906 (p. 180) du *Bull. des sciences math. et phys. élèmentaires* contient une note *sur le problème relatif à la résolution d'un triangle dont on connait deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.*

La résolution proposée par l'auteur appelle quelques remarques. Elle consiste à envisager les côtés du triangle ABC comme cordes d'arcs du cercle circonscrit de rayon r et de centre O. L'angle B et les côtés $BC = a$, $CA = b$ étant supposés connus, elle donne pour les éléments inconnus les expressions suivantes :

$$\sphericalangle AOC = 2 B, \quad r = \frac{b}{\sqrt{2(1 - \cos AOC)}}, \quad \cos 2 A = \frac{2 r^2 - a^2}{2 r^2},$$
$$C = 180 - (A + B) \quad \sphericalangle AOB = 2 C, \quad c = r \sqrt{2(1 - \cos AOB)}.$$

Mais ces formules contiennent plusieurs expressions non monomes, aussi n'ont-elles aucune portée pratique.

On peut les mettre sous une forme plus simple, comme nous l'a fait remarquer M. l'abbé Gelin, en observant que l'on a

$$1 - \cos 2 B = 2 \sin^2 B, \quad 1 - \cos 2 C = 2 \sin^2 C .$$

On a alors

$$2 r = \frac{b}{\sin B}, \quad \sin A = \frac{a}{2 r}, \quad C = 180 - (A + B), \quad c = 2 r \sin C,$$

formules que l'on démontre du reste directement sur la figure en partant des relations

$$a = 2 r \sin A, \quad b = 2 r \sin B, \quad c = 2 r \sin C.$$

Enfin si l'on remplace $2r$ par sa valeur, on a

$$\sin A = \frac{a \sin B}{b}, \quad C = 180 - (A + B), \quad c = \frac{b \sin C}{\sin C},$$

qui sont les expressions fournies par la solution classique.

L'emploi de l'auxiliaire r est superflu et l'on voit aisément qu'il n'évite pas le *cas douteux*[1], comme l'auteur semble croire, suivant une remarque de M. Barbette.

R. GUIMARAES (Elvas, Portugal).

CHRONIQUE

Académie des Sciences de Paris.

PRIX DÉCERNÉS :

La séance publique annuelle consacrée aux prix de l'Académie des Sciences a eu lieu le 2 décembre sous la présidence de M. CHAUVEAU. M. G. DARBOUX, secrétaire perpétuel, présente les rapports sur les prix décernés par l'Académie pour l'année 1907[2].

GÉOMÉTRIE ; *prix Francœur*. — Le prix est décerné à M. E. LEMOINE pour l'ensemble de ses travaux mathématiques.

Prix Bordin. — Le prix est attribué au mémoire de MM. ENRIQUES et SEVERI.

Prix Vaillant. — Le prix est réparti, en parties inégales, entre MM. Jacques HADAMARD, G. LAURICELLA, A. KORN et T. BOGGIO. Le premier des mémoires sera publié dans le *Recueil des Savants étrangers*.

MÉCANIQUE ; *prix Montyon*. — M. CUËNOT, pour ses études sur les déformations des voies de chemin de fer. Mention très honorable à M. PETOT, pour sa théorie des automobiles.

Prix Poncelet. — Le prix est attribué à feu M. le colonel RENARD, pour ses recherches mathématiques et expérimentales sur la mécanique et pour la part qui lui revient dans l'état actuel de l'aéronautique.

---

[1] Le *cas douteux* qui se présente dans la résolution des triangles rectilignes, se trouve très bien traité, et fort simplement, dans la *Plane and spherical Trigonometry in three parts*, par M. B. Goodwin, 7e édit., Longmans, Green and Co, New-York and Bombay, 1903, 154-155.

[2] La liste des prix proposés pour les années 1907-1909 a été publiée dans *L'Ens. math.* du 15 janvier 1907.