THÉORIE DES MIROIRS PLANS PARALLÈLES A UNE MÊME DROITE

Si trois points, dans un plan, ou quatre points, dans l'espace, sont animés de mouvements rectilignes et uniformes, on peut attribuer à ces points des masses telles que leur centre de gravité reste invariable.

Il faut entendre ici par le mot « masse » des coefficients positifs ou négatifs. Pour que les masses soient toutes positives, il faut et il suffit que l'une quelconque des vitesses soit dirigée dans l'angle (ou plan, ou trièdre) opposé à celui que forment les autres vitesses. C. A. LAISANT.

THÉORIE DES MIROIRS PLANS PARALLÈLES A UNE MÊME DROITE

1. Supposons n miroirs plans tous parallèles à une même droite l et désignons par $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ les lignes d'intersection des faces réfléchissantes avec un plan quelconque perpendiculaire à l.

Considérons dans ce plan les rayons issus d'un point fixe R. Soit r un des rayons initiaux et $r_1, r_2, r_3, \ldots r_n$ les rayons réfléchis successivement par $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ (Fig. 1).

Dans sa Géométrie projective[1], CREMONA examine la construction d'un rayon r passant par R et faisant avec r_n un angle donné à l'avance. On sait que cette construction se déduit d'un problème célèbre de Poncelet[2] consistant à inscrire un polygone dans un autre polygone et dont les côtés passent par des points arbitrairement donnés. En général cette construction possède deux solutions. Mais, pour le problème de Cremona qui est un cas particulier du problème de Poncelet, ce résultat doit être modifié ; c'est ce que nous voulons démontrer. Nous en déduirons les propriétés des miroirs angulaires dont on se sert en géodésie.

Pour plus de généralité supposons que la réflexion d'un

---

[1] *Elements of projective geometry*, p. 199. (édition anglaise).
[2] *Traités des propriétés projectives des Figures.*

rayon puisse avoir lieu sur toute l'étendue d'une face réfléchissante et qu'un rayon réfléchi r; qui ne frappe pas la face consécutive m_{i+1} doive être prolongée en arrière jusqu'au point d'intersection avec cette surface, d'où il est réfléchi de nouveau. Il est évident que ce postulat renferme les faits physiques comme cas particuliers.

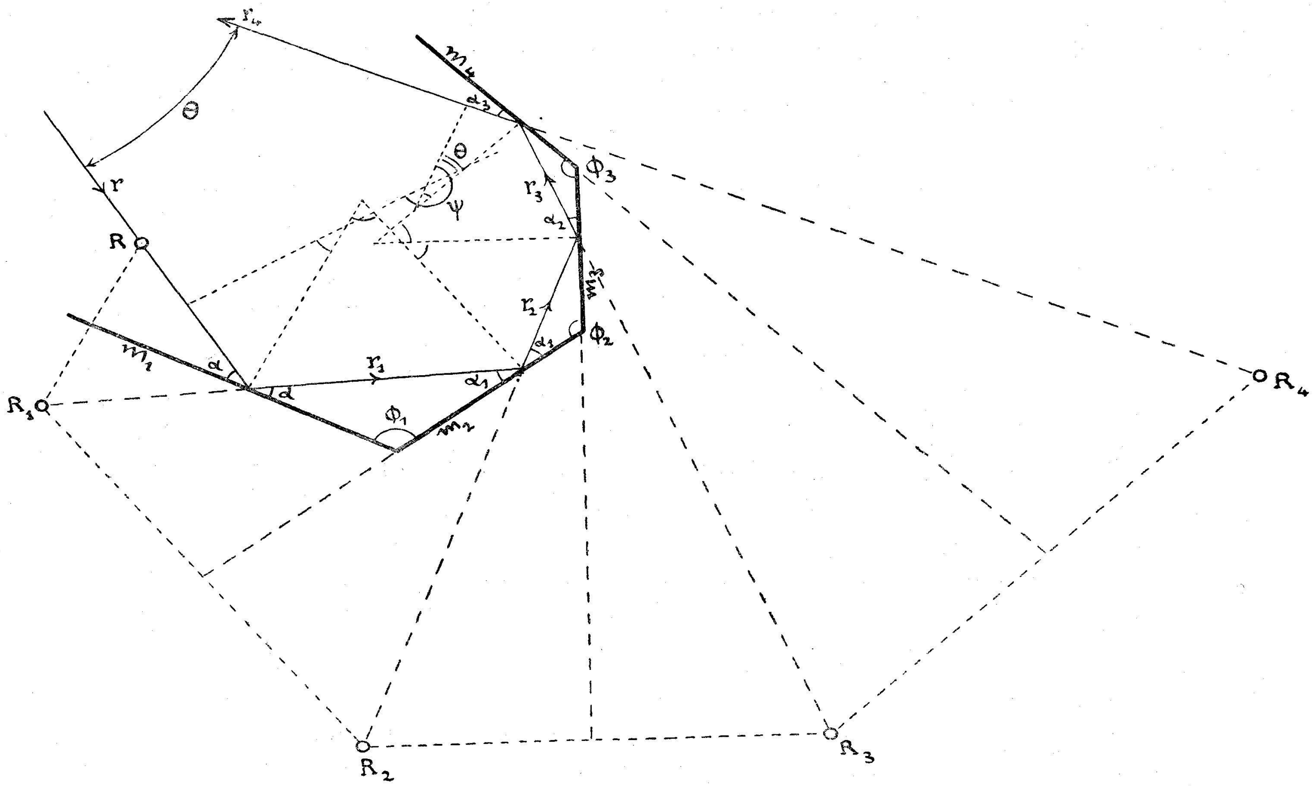

Fig. 1.

2. Cela posé, tous les rayons réfléchis r_1 passent par un point fixe R_1 qui est le symétrique de R par rapport à m_1; tous les rayons r_2 passent par R_2 qui est le symétrique de R_1 par rapport à m_2, etc.

Finalement tous les rayons r_n réfléchis par la face m_n passent par R_n qui est le symétrique de R_{n-1} par rapport à m_n.

Les rayons (r) et les rayons (r_n) forment deux faisceaux projectifs et ils engendrent une conique C qui passe par les points R et R_n.

Dans le problème de Cremona il faut construire un rayon r formant avec r_n un angle donné θ. Pour trouver ce rayon on fait passer un cercle K par R et R_n de telle manière que les angles inscrits soutenus par la corde RR_n soient tous égaux à θ sur un côté, et à $\pi - \theta$ sur l'autre. Les faisceaux formés par les rayons (r) et (r_n) coupent le cercle K en deux ponctuelles projectives dont les points doubles, s'ils existent, déterminent les deux solutions du problème. On voit aisément que les faisceaux successivement formés par les rayons (r) (r_1) (r_2), ..., (r_n) sont congruents et, alternativement, de sens contraires. Par conséquent. si le nombre n des miroirs est pair, les faisceaux (r) et (r_n) sont de même sens et donnent un cercle C passant par R et R_n.

Dans ce cas le problème de Cremona n'a pas de solutions. Mais si on dispose des α de telle manière que le cercle C *coïncide avec* K, *on a une infinité de solutions; tout rayon* r *passant par* R *satisfait aux conditions du problème.*

Si n *est un nombre impair les faisceaux* (r) *et* (r_n) *sont de sens contraires et engendrent une hyperpole. Dans ce cas il y a deux solutions.*

3. Nous voulons maintenant établir la relation entre l'angle d'incidence α sur m_1 du rayon r, les angles $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1}$ formés par m_1 et m_2, m_2 et m_3, ..., m_{n-1} et m_n et l'angle θ formé par r et r_n.

La figure donne les relations suivantes:

$$\alpha_i + \alpha_{i+1} + \varphi_{i+1} = \pi ,$$

$$\alpha_{i+1} = \pi - \alpha_i - \varphi_{i+1} ;$$

d'où

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \pi - \alpha - \varphi_1 , \\
\alpha_2 &= \alpha + \varphi_1 - \varphi_2 , \\
\alpha_3 &= \pi - \alpha - \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_3 , \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{2k-1} &= \pi - \alpha - (\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \cdots + \varphi_{2k-1}) , \\
\alpha_{2k} &= \alpha + (\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \cdots - \varphi_{2k}) .
\end{aligned}$$

L'angle formé par les deux perpendiculaires sur r et r_n est égal à

$$\psi = \alpha + (\pi - \varphi_1) + (\pi - \varphi_2) + \dots + (\pi - \varphi_{n-1}) + \alpha_{n-1} ,$$

ou

$$\psi = \alpha + \alpha_{n-1} + (n-1)\pi - (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_{n-1}) ,$$

et

$$\theta = \pi - (2\pi - \psi) = \psi - \pi ,$$

ou

$$\theta = \alpha + \alpha_{n-1} + (n-2)\pi - (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_{n-1}) .$$

4. Pour n pair et égal à $2k$ on a

$$\theta = \alpha + \pi - \alpha - (\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 - \dots + \varphi_{2k-1}) + (n-2)\pi -$$
$$(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_{2k-1}) ,$$

d'où

$$\theta = (n-1)\pi - 2(\varphi_1 + \varphi_3 + \dots + \varphi_{2k-1}) .$$

On voit que θ est indépendant de α, et est constant; ce qui montre bien que le point d'intersection de r *et* $\mathrm{r_n}$ *décrit un cercle. D'ailleurs on peut faire varier les angles $\varphi_2, \varphi_4, \dots,$ d'une manière arbitraire, sans changer θ.*

On peut aussi faire varier les $\varphi_1, \varphi_3, \varphi_5, \dots$ individuellement si leur somme reste constante. Prenons par exemple $n = 4$, et $\theta = \frac{\pi}{2}$, alors

$$\frac{\pi}{2} = 3\pi - 2(\varphi_1 + \varphi_3) ,$$

d'où

$$\varphi_1 + \varphi_3 = \frac{1}{2}\left(3\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{4} .$$

Pour satisfaire cette condition on peut poser $\varphi_1 = \varphi_3 = \frac{5\pi}{8}$, c'est-à-dire, faire les angles entre les deux premiers et les deux derniers miroirs tous les deux égaux à 112° 30′. L'angle entre a_2 et a_3 est arbitraire. Cela ressort de la fig. 2.

Pour $n = 2$, $\theta = \frac{\pi}{2}$. De la formule on tire

$$\frac{\pi}{2} = \pi - 2\varphi_1 , \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{4} .$$

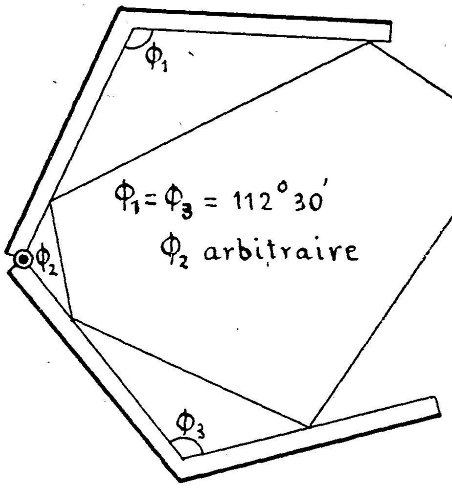

Fig. 2.

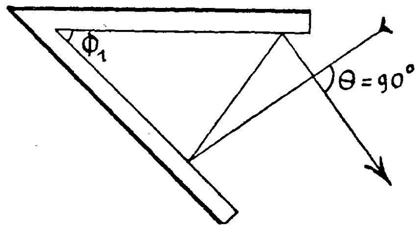

Fig. 3.

C'est le cas, bien connu dans l'arpentage, de l'équerre optique (fig. 3).

5. Pour n impair et égal à $2k + 1$, on a

$$\theta = \alpha + \alpha_{2k} + (2k - 1)\pi - (\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \cdots + \varphi_{2k}) ,$$

ou

$$\theta = 2\alpha - 2(\varphi_2 + \varphi_4 + \cdots + \varphi_{n-1}) + (n - 2)\pi .$$

L'angle θ dépend de α et ne change pas si on fait varier les angles $\varphi_1, \varphi_3, \ldots$ arbitrairement. On peut aussi modifier les angles $\varphi_2, \varphi_4, \ldots$ mais en faisant leur somme constante.

Arn. Emch (Soleure, Suisse).