SUR LE PROLONGEMENT ANALYTIQUE D'UNE FONCTION MÉROMORPHE 1

laires ou rectilignes (*Journal de Physique*, avril 1908), ce qui prouve que le succès du nouveau diplôme n'est pas moindre dans le clan des physiciens que dans celui des géomètres.

Je serais heureux d'inspirer à quelque étudiant étranger le désir de le conquérir et heureux d'autre part si la préparation à l'Agrégation n'entraînait plus dans l'avenir, pour les membres de l'Enseignement supérieur, que la considération de travaux de la nature indiquée.

A. BUHL. (Montpellier).

SUR LE PROLONGEMENT ANALYTIQUE D'UNE FONCTION MÉROMORPHE [1]

---

1. — Les méthodes de prolongement analytique reposent surtout sur un théorème, dû à Weierstrass, d'après lequel toute fonction définie hors d'un cercle taylorien, et coïncidant dans celui-ci avec l'élément de fonction y relatif, prolonge l'élément considéré. Une des méthodes les plus remarquables, étudiée surtout par MM. BOREL et MITTAG-LEFFLER consiste à construire effectivement le prolongement au moyen d'expressions linéaires où ne figurent que des polynômes constitués eux-mêmes par des fragments du développement taylorien connu. M. A. BUHL est revenu, par des formules très simples, sur la méthode en question (*Bull. des Sciences mathém.*, 1907 et 1908). Je me propose de reprendre les résultats de M. Buhl et d'en tirer quelques applications et remarques nouvelles.

Je me bornerai, pour plus de simplicité, à une fonction méromorphe $F(x)$ ayant des pôles a_k de résidus A_k.

Je forme d'abord l'étoile de M. Mittag-Leffler obtenue en traçant des demi-droites issues des a_k et opposées à l'origine.

[1] Résumé d'un travail présenté à la Faculté des Sciences de Montpellier, le 23 juin 1908, pour l'obtention du Diplôme d'Etudes supérieures.

Tout contour C entourant l'origine (supposée point régulier) peut grandir en s'étoilant entre les coupures formant l'étoile mais sans jamais franchir celles-ci. Pour un tel contour on aura la formule fondamentale de Cauchy :

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{F(z)\,dz}{z - x} .$$

Si C se réduit à un cercle n'enfermant aucun a_k on aura la formule de Taylor :

$$F(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_C \left(\frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \dots \right) F(z)\,dz .$$

J'en considère la somme des $n + 1$ premiers termes, soit

$$s_n = \frac{1}{2i\pi} \int_C F(z) \frac{z^{n+1} - x^{n+1}}{z - x} \frac{dz}{z^{n+1}} .$$

Soit maintenant $f(\xi)$ une fonction *entière*. J'aurai pour celle-ci la formule de Taylor, valable quel que soit le contour Γ,

$$f(\xi) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{\xi}{\zeta^2} + \dots \right) f(\zeta)\,d\zeta .$$

Soit c_n le $(n + 1)^{\text{ième}}$ terme de ce développement. On met immédiatement le produit $c_n s_n$ sous forme d'une intégrale double et, en s'appuyant sur les identités

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{z^{n+1} - x^{n+1}}{\zeta^{n+1} z^{n+1}} \xi^n = \sum \frac{\xi^n}{\zeta^{n+1}} - x \sum \frac{(\xi x)^n}{(\zeta z)^{n+1}} = \frac{1}{\zeta - \xi} - \frac{x}{\zeta z - \xi x}$$

vraies si $|\xi| < |\zeta|$ et si $|\xi x| < |\zeta z|$, on trouve la formule fondamentale

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n s_n = \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_C \int_\Gamma \frac{F(z) f(\zeta)}{(\zeta - \xi)\left(z - \frac{\xi x}{\zeta}\right)} d\zeta dz .$$

Quels que soient ξ et x on peut toujours imaginer que le contour Γ soit un cercle de rayon $|\zeta|$ assez grand pour que les inégalités précédentes soient vérifiées.

2. — M. Buhl a étudié la formule précédente en commen-

çant par intégrer par rapport à z. Je me propose de retrouver ses résultats en intégrant d'abord par rapport à ζ. Le second membre de (1) peut immédiatement s'écrire

$$\left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_C \int_\Gamma \frac{F(z) f(\zeta)\, dz d\zeta}{(z-x)(\zeta-\xi)} - \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^2 \int_C \int_\Gamma \frac{x F(z) f(\zeta)\, dz d\zeta}{z(z-x)\left(\zeta - \dfrac{\xi x}{z}\right)} \cdot$$

D'après les inégalités fondamentales accompagnant la formule (1) on voit que l'intégration en ζ donne immédiatement

$$f(\xi) \frac{1}{2i\pi} \int_C \frac{F(z)\, dz}{z-x} - \frac{1}{2i\pi} \int_C f\left(\frac{\xi x}{z}\right) \frac{x F(z)\, dz}{z(z-x)}$$

d'où

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n s_n = f(\xi)\, F(x) - \frac{1}{2i\pi} \int_C f\left(\frac{\xi x}{z}\right) \frac{x F(z)\, dz}{z(z-x)} . \tag{2}$$

Supposons les pôles a_k rangés par modules croissants. Soit un cercle C_k ayant l'origine pour centre et passant entre a_k et a_{k+1}. La théorie des résidus donne, le contour C étant toujours supposé intérieur à C_k,

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_k} - \frac{1}{2i\pi} \int_C = \sum_k f\left(\frac{\xi x}{a_k}\right) \frac{x A_k}{a_k(a_k - x)} , \tag{3}$$

le sigma étant relatif à tous les pôles a_k contenus entre C_k et C.

Reste à évaluer

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{C_k} f\left(\frac{\xi x}{z}\right) \frac{x F(z)\, dz}{z(z-x)} . \tag{4}$$

Pour cela on peut imaginer que la circonférence C_k soit une couronne de Laurent aussi étroite qu'il le faudra. Pour z dans cette couronne on aura

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{C_k} F(u) \left(\frac{1}{u} + \frac{z}{u^2} + \dots\right) du + \frac{1}{2i\pi} \int_{C_k} F(u) \left(\frac{1}{z} + \frac{u}{z^2} + \dots\right) du .$$

D'ailleurs on a aussi

$$f\left(\frac{\xi x}{z}\right) = \gamma_0 + \gamma_1 \frac{\xi x}{z} + \gamma_2 \left(\frac{\xi x}{z}\right)^2 + \dots$$

$$\frac{1}{z-x} = \frac{1}{z} + \frac{x}{z^2} + \frac{x^2}{z^3} + \dots$$

Or, si l'on forme maintenant l'expression

$$f\left(\frac{\xi x}{z}\right)\frac{x\mathrm{F}(z)}{z(z-x)}$$

on en fera une série procédant suivant les puissances positives et négatives de z et l'intégrale (4) sera une série dont tous les termes seront nuls à l'exception de celui qui contient z à la puissance -1.

On a alors pour représenter (4) l'expression

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\gamma_0+\gamma_1\xi+\cdots+\gamma_{n-1}\xi^{n-1}\right)\frac{x^n}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}_k}\frac{\mathrm{F}(u)\,du}{u^{n+1}}.$$

Avec ce nouveau résultat les formules (2), (3), (4) donnent

$$(\mathrm{A})\quad\left\{\begin{aligned}\mathrm{F}(x) &= \sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{c_n s_n}{f(\xi)}+\sum_k\frac{f\left(\frac{\xi x}{a_k}\right)}{f(\xi)}\frac{x\mathrm{A}_k}{a_k(x-a_k)}\\ &+\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\gamma_0+\gamma_1\xi+\cdots+\gamma_{n-1}\xi^{n-1}}{f(\xi)}\frac{x^n}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}_k}\frac{\mathrm{F}(u)\,du}{u^{n+1}}.\end{aligned}\right.$$

C'est bien la formule donnée par M. Buhl dans son mémoire *Sur la représentation des fonctions méromorphes par des séries de polynômes tayloriens*. (*Bull. des Sciences mathém.*, 1908).

3. — Dans ce travail je ne me propose pas une étude complète de la formule (A), mais seulement du cas où le second membre de cette formule peut se réduire au premier sigma. Pour cela imaginons que $|\xi|$ croisse indéfiniment dans une direction issue de l'origine et choisie de telle manière qu'il en soit de même de $|f(\xi)|$. Alors on voit facilement que le dernier sigma de (A) tend vers zéro. Si de plus, pour $|\xi|$ croissant comme il est indiqué, on a toujours

$$(\mathrm{B})\qquad \lim_{\xi=\infty}\frac{f\left(\frac{\xi x}{a_k}\right)}{f(\xi)}=0,$$

la formule (A) se réduit à

$$\text{(C)} \qquad F(x) = \lim_{\xi=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{c_n s_n}{f(\xi)} \cdot$$

C'est le type général des formules de sommabilité de M. Borel. Quant à la condition (B), on conçoit qu'elle ne peut être réalisée que pour x dans une certaine région du plan où l'on cherche à définir $F(x)$. Je dirai que c'est la *région de sommabilité* dans laquelle la formule (C) est valable.

4. — La formule (A) a été établie dans le cas où les pôles de $F(x)$ étaient simples. Si ce sont des pôles multiples d'ordre n, on voit, d'après une formule bien connue, que le second membre de (3), et par suite le second sigma de (A), contiennent linéairement

$$f\left(\frac{\xi x}{a_k}\right), \qquad f^{(1)}\left(\frac{\xi x}{a_k}\right), \ldots, \qquad f^{(n-1)}\left(\frac{\xi x}{a_k}\right)$$

et non pas seulement la première de ces quantités. Alors la condition (B) est à remplacer par n conditions qui, cas très important, se confondent si $f(\xi) = e^{\xi}$.

Etude de la formule (C).

5. — La formule (C) ne sera applicable, si n est l'ordre de multiplicité des pôles de $F(x)$, que pour x situé dans des régions du plan telles que l'on ait

$$\lim_{\xi=\infty} \frac{f^{(i)}\left(\frac{\xi x}{a_k}\right)}{f(\xi)} = 0, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Si ces n conditions sont réalisables, il s'ensuit notamment que la formule (C) est $n-1$ fois dérivable dans le cas où $F(x)$ serait une fonction à pôles simples car la $(n-1)^{\text{ième}}$ dérivée a alors des pôles d'ordre n. La formule (C) est même indéfiniment dérivable si $f(\xi) = e^{\xi}$. Ce résultat a été signalé par M. Borel. On pourrait le généraliser mais il est particulièrement évident quand la fonction sommatrice est la fonction exponentielle.

La méthode de sommation exponentielle est donc particulièrement importante. Je me propose, dans ce qui suit, de retrouver les résultats de M. Borel concernant les fonctions sommatrices

$$f(\xi) = e^{\xi}, \qquad f(\xi) = e^{\xi^p}, \quad (p \text{ entier})$$

et d'étudier en outre le cas de

$$f(\xi) = e^{e^{\xi}}.$$

6. — *Méthode de sommation exponentielle.* — C'est le cas où l'on prend $f(\xi) = e^{\xi}$. Cherchons les points x pour lesquels on ait

$$\lim_{\xi = \infty} \frac{e^{\frac{\xi x}{a_k}}}{e^{\xi}} = 0 .$$

Posons pour cela

$$\xi = \rho e^{i\omega}, \qquad x = re^{i\theta}, \qquad a_k = \alpha_k e^{i\tau_k}.$$

Envoyons ξ à l'infini dans la direction d'argument ω. La limite à chercher est celle d'une exponentielle dont l'exposant est

$$\rho(\cos\omega + i\sin\omega)\left[\frac{r}{\alpha_k}\cos(\theta - \tau_k) + \frac{r}{\alpha_k} i\sin(\theta - \tau_k) - 1\right].$$

Cette exponentielle tendra vers 0 si la partie réelle de l'exposant croît indéfiniment par valeurs négatives, ce qui exige

$$\frac{r}{\alpha_k}\cos(\omega + \theta - \tau_k) - \cos\omega < 0 .$$

Considérons la droite d'équation

$$\frac{r}{\alpha_k}\cos(\omega + \theta - \tau_k) - \cos\omega = 0 .$$

Si ω est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ l'inégalité précédente est vérifiée pour tous les points situés du même côté que l'origine par rapport à cette droite. Comme à chaque pôle de la fonction F correspond une droite, la région des points du plan où la formule (B) sera applicable sera formée par la région située du même côté que l'origine par rapport à toutes ces droites ; c'est donc une région polygonale, appelée *polygone de sommabilité*.

Si ω est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ l'inégalité précédente n'est alors vérifiée que pour les points du plan situés de l'autre côté de l'origine par rapport à la droite précédente.

Dans ce cas la région de sommabilité, si elle existe, est constituée par tous les points du plan situés de l'autre côté de l'origine par rapport à toutes ces droites. Elle n'existe que si $F(x)$ se réduit à une fraction rationnelle car alors le dernier terme de (A) n'existe pas. Si ce terme était conservé il ne pourrait disparaître pour $|\xi|$ croissant dans la direction indiquée, e^{ξ} ne croissant pas alors indéfiniment.

7. — *Etude du polygone de sommabilité.* — Le côté du polygone de sommabilité relatif au point singulier α_k, τ_k a pour équation

$$x \cos(\omega - \tau_k) - y \sin(\omega - \tau_k) - \alpha_k \cos \omega = 0 .$$

Le coefficient angulaire de cette droite est $\operatorname{cotg}(\omega - \tau_k)$; le coefficient angulaire de la droite joignant l'origine au point (α_k, τ_k) est $\operatorname{tg} \tau_k$. L'angle φ de ces deux droites se calcule facilement et est égal à

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \omega$$

d'où la propriété suivante :

Les droites joignant l'origine aux points singuliers de la fonction F *font avec les côtés du polygone passant par ces points des angles constants égaux à* $\frac{\pi}{2} - \omega$.

Dans le cas où $\omega = 0$ l'angle précédent est droit, et les côtés du polygone correspondant aux points singuliers situés sur le cercle de convergence sont tangents à ce cercle. Le cercle de convergence est alors situé tout entier à l'intérieur du polygone de sommabilité.

Au contraire si ω est différent de 0 mais compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, certains côtés du polygone de sommabilité sont sécants par rapport au cercle de convergence, et il y a alors une région du cercle de convergence qui est extérieure au polygone de sommabilité; ce qui nous conduit à cette remarque curieuse, que, pour les points d'une région du plan où la série de Taylor est convergente, la sommabilité peut ne pas avoir lieu. Le cas de $\omega = 0$ est celui étudié d'abord par M. Borel.

Pour $\omega = \pm\frac{\pi}{2}$ le polygone de sommabilité est réduit au point origine.

Quand ω varie chaque côté du polygone tourne autour du point singulier y relatif, dans le même sens. Ces côtés font tous des angles égaux avec les droites joignant les dits points singuliers à l'origine.

Les sommets du polygone de sommabilité ou, plus généralement, les points de rencontre de deux côtés du polygone décrivent des cercles passant par l'origine et les deux points singuliers, correspondants.

Proposons-nous le problème suivant.

A quelles conditions le point de rencontre de deux côtés correspondants à deux points singuliers sera-t-il sommet du polygone de sommabilité pour une valeur de ω; et à quelles conditions le restera-t-il quel que soit ω.

La condition nécessaire et suffisante pour que le point de rencontre de deux côtés correspondants à deux points singuliers a_1, a_2 *soit un sommet du polygone de sommabilité, quel que soit ω, est qu'il n'y ait aucun point singulier de la fonction F à l'intérieur du cercle passant par l'origine et les points singuliers* a_1, a_2.

La condition est nécessaire, il suffit de montrer pour cela que s'il existait un point singulier a_3 à l'intérieur du cercle a_1Oa_2, le point M de rencontre des côtés a_1, a_2 serait séparé de l'origine par le côté a_3. Donc OM serait, quel que soit ω, coupé par le côté relatif à a_3 en un point Q situé entre O et M.

Le lieu du point Q quand ω varie, est un cercle passant par a_3, O, et tangent en O au cercle a_1Oa_2. On a en effet

$$\widehat{MQa_3} = \pi - \widehat{QPa_1} - \widehat{QMP} ,$$

$$\widehat{QPa_1} = \widehat{a_1Oa_3} = \tau_1 - \tau_3 ,$$

$$\widehat{QMP} = \widehat{a_1a_2O} = \text{const} ,$$

$$\widehat{MQ\alpha_3} = \pi - (\tau_1 - \tau_3) - \widehat{a_1a_2O} = \text{const} .$$

Donc le point Q décrit un cercle et la tangente à ce cercle au point O fait avec le côté Oa_3 l'angle

$$\pi - (\tau_1 - \tau_3) - \widehat{a_1a_2O} .$$

De même la tangente au cercle a_1a_2O au point O fait avec Oa_3 l'angle

$$\widehat{a_2a_1O} + \tau_3 - \tau_2 ,$$

qui est égal à

$$\pi - (\tau_1 - \tau_3) - \widehat{a_1a_2O} .$$

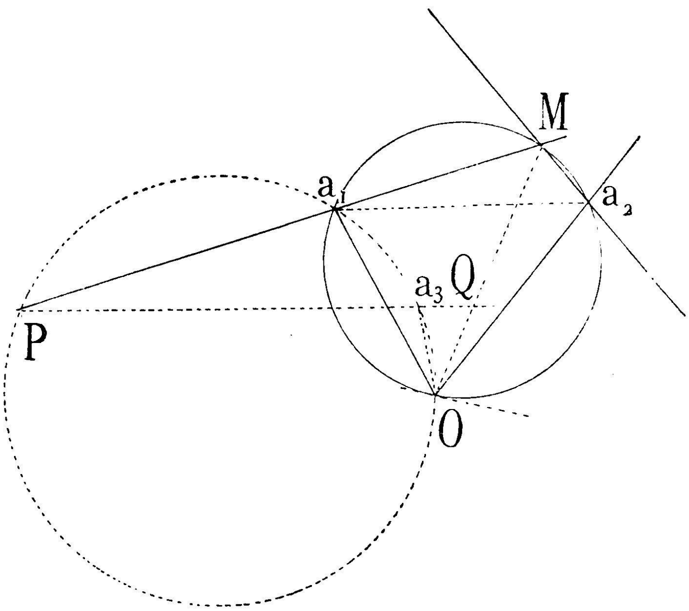

Fig. 1.

Le point Q est donc à l'intérieur du cercle a_1Oa_2 et il est, quel que soit ω, compris entre O et M.

La condition est suffisante car, s'il existait un côté du polygone séparant le point M du point O, on voit en s'aidant de la démonstration précédente que ce point singulier auquel ce côté correspondrait serait situé à l'intérieur du cercle a_1Oa_2. Ce que l'on ne suppose pas.

Ces propriétés géométriques nous permettent de construire les seuls côtés utiles intervenant dans la formation du polygone de sommabilité.

8. — *Région de sommabilité obtenue par la variation de* ω. — Déterminons toute la région constituée par les points du plan pour lesquels la série de Taylor de la fonction sera sommable pour une valeur de ω au moins ; il existe en effet des

régions du plan qui sont situées dans des polygones de sommabilité correspondant à de certaines valeurs de ω et ne sont pas à l'intérieur d'autres polygones de sommabilité correspondant à d'autres valeurs de ω.

Or tout point sommet du polygone de sommabilité pour une valeur de ω l'est pour toutes les valeurs de ω comprises entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$; et lorsque ω varie entre ces limites, ces points sommets du polygone décrivent entièrement leur circonférence lieu.

Il résulte donc que la région de sommabilité sera limitée par des cercles passant par l'origine et par les groupes de deux points singuliers auxquels correspondent les sommets du polygone. Dans le cas où ω est compris entre $+\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{3\pi}{2}$ la région extérieure de sommabilité n'existe qu'autant que la fonction $F(x)$ est une fraction rationnelle. Il est de plus nécessaire et suffisant que les pôles de cette fonction soient tels qu'il en existe deux d'entre eux tels que le cercle passant par l'origine et ces deux points contienne tous les autres. La région de sommabilité est alors l'angle limité par les côtés correspondants à ces deux points; région située de l'autre côté de l'origine par rapport à ces deux côtés. Ceci nous permet de déterminer la région totale de sommabilité lorsque ω varie de $\frac{\pi}{2}$ à $\frac{3\pi}{2}$.

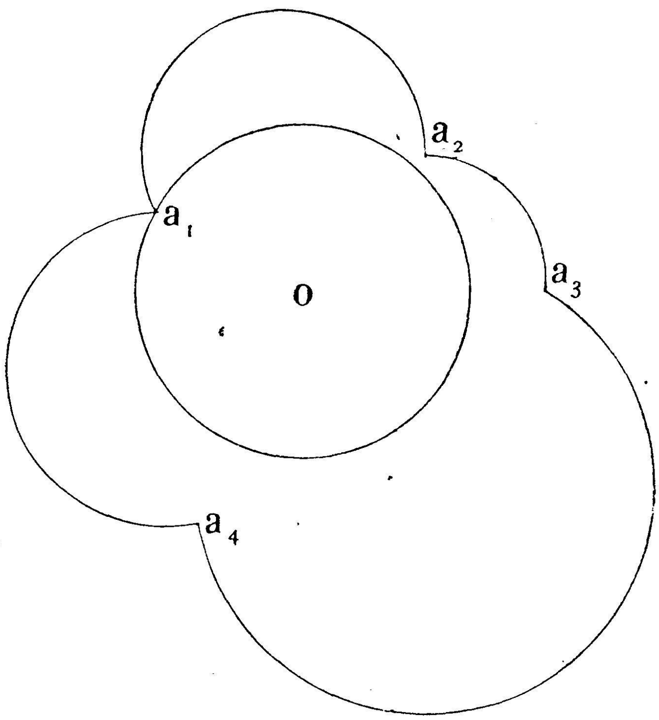

Fig. 2.

9. — *Méthode de sommation exponentielle généralisée.* Elle correspond à l'emploi de la fonction sommatrice $f(\xi) = e^{\xi^p}$, p étant entier.

Cherchons les points x du plan vérifiant, quel que soit le point singulier a_k, la condition

$$\lim_{\xi=\infty} \frac{e^{\left(\frac{\xi x}{a_k}\right)^p}}{e^{\xi^p}} = 0 .$$

Cela revient à chercher la limite d'une exponentielle dont l'exposant est

$$\rho^p(\cos p\omega + i \sin p\omega)\left[\left(\frac{r}{\alpha_k}\right)^p \cos p(\theta - \tau_k) + \left(\frac{r}{\alpha_k}\right)^p i \sin p(\theta - \tau_k) - 1\right].$$

Cette exponentielle tendra vers 0 lorsque ξ croîtra indéfiniment dans la direction ω, si l'on a

$$\left(\frac{r}{\alpha_k}\right)^p \cos p(\omega + \theta - \tau_k) - \cos p\omega < 0 .$$

C'est une condition analogue à celle déjà trouvée, mais elle nous amène à considérer les courbes

$$r^p = \frac{\alpha_k^p \cos p\omega}{\cos p(\omega + \theta - \tau_k)}$$

qui, dans le cas de $\omega = 0$, ont été encore considérées par M. Borel.

On peut faire sur ces courbes limitant la région de sommabilité des raisonnements absolument identiques à ceux déjà fait dans le cas de la méthode exponentielle, on est conduit à des résultats plus généraux ; et l'on peut montrer que l'on peut disposer du nombre p, entier, de manière à étendre la région de sommabilité en un point quelconque du plan.

10. — *Emploi de la fonction sommatrice* $f(\xi) = e^{e^\xi}$. — Par un raisonnement toujours analogue aux précédents on déterminera la région de sommabilité en égalant à zéro la limite, pour $|\xi|$ croissant indéfiniment, d'une exponentielle dont l'exposant est

$$e^{\frac{\xi x}{a_k}} - e^{\xi} .$$

Cela nous conduit à écrire que la partie réelle de cette quantité croît indéfiniment par valeurs négatives. Or on trouve facilement que cette partie réelle est

$$e^{\frac{\rho r}{\alpha_k}\cos(\theta+\omega-\tau_k)} \cos\left[\frac{\rho r}{\alpha_k}\sin(\theta+\omega-\tau_k)\right] - e^{\rho\cos\omega}\cos(\rho\sin\omega)$$

les notations étant les mêmes qu'au paragraphe 6.

Considérons maintenant la droite

$$\rho \sin\omega = a ,$$

qui est parallèle à l'axe réel et pour laquelle nous supposerons $a < \frac{\pi}{2}$. Si l'extrémité du rayon vecteur ρ va à l'infini en suivant cette droite dans le sens positif, le second terme de la partie réelle ci-dessus considérée se comporte à l'infini comme

$$- e^{\rho} \cos a ,$$

C'est diré que ce terme croît indéfiniment par valeurs négatives. Je dis qu'on peut s'arranger à ce que le terme précédent tende vers zéro dans les mêmes conditions. Il suffit pour cela que le facteur $\cos(\theta+\omega-\tau_k)$ qui figure dans l'exposant soit toujours négatif. Comme, pour les grandes valeurs de ρ, ω devient nul, il faudra

$$\frac{3\pi}{2} > \theta - \tau_k > \frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad \frac{3\pi}{2} + \tau_k > \theta > \frac{\pi}{2} + \tau_k .$$

Géométriquement cela revient à dire qu'un point singulier d'argument τ_k de $F(x)$ entraîne que la région de sommabilité n'est qu'un demi-plan limité par une droite passant par l'origine et perpendiculaire à la direction τ_k. Si tous les points singuliers de $F(x)$ sont compris dans un angle ayant son sommet à l'origine et une ouverture λ, la région de sommabilité est un angle de même nature dont les côtés sont perpendiculaires à ceux du précédent et dont l'ouverture est par suite $180° - \lambda$. On voit que la fonction sommatrice ici étudiée ne peut être employée que pour une fonction $F(x)$ dont les singularités ne sortent pas d'un demi-plan.

ETUDE DU CAS OU LA FONCTION $f(\xi)$ N'EST PAS ENTIÈRE. RÉSULTATS DE CESARO.

11. — Je vais indiquer très brièvement ce qu'il advient lorsque la fonction sommatrice f a des singularités à distance finie. Je m'en tiendrai d'ailleurs au cas où ce sera une fraction rationnelle. Ce cas qu'il me semble naturel de placer après celui où f n'a pas de singularités à distance finie a été cependant le premier étudié au point de vue historique. Il correspond à des formules données en premier lieu par Cesàro. La formule fondamentale (1) du paragraphe 1 subsiste si Γ est un cercle de rayon fini mais, pour que les intégrations conservent la forme indiquée dans la suite, Γ ne doit contenir aucun point singulier de f. On peut alors imaginer que ce cercle Γ qui a l'origine pour centre soit décrit de manière à s'approcher autant qu'on le voudra du point singulier de f le plus rapproché de l'origine et que la variable ξ, tout en restant dans Γ, s'approche aussi du point singulier en question ce qui est une manière de faire croître $|f(\xi)|$ autant qu'on veut. Mais alors, des conditions $|\xi| < |\zeta|$, $|\xi x| < |\zeta z|$, on ne peut tirer autre chose que $|x| \leqq |z|$. La condition $|x| < |z|$ est la même que celle qui caractérise la formule de Taylor ; comme de plus nous pouvons avoir $|x| = |z|$ il s'en suit que l'on peut obtenir des formules valables sur la circonférence du cercle de convergence d'un développement taylorien.

Prenons par exemple $f(\xi) = \frac{1}{1-\xi}$. Nous aurons

$$F(x) = \lim_{\xi = 1} \frac{s_0 + \xi s_1 + \xi^2 s_2 + \dots}{1 + \xi + \xi^2 + \dots}$$

ou

$$F(x) = \lim_{n = \infty} \frac{s_0 + s_1 + \dots + s_{n-1}}{n}$$

ce qui est la formule bien connue donnée par Cesàro.

Prenons encore, p étant entier,

$$f(\xi) = \frac{1}{1 - \xi^p}.$$

Alors

$$F(x) = \lim_{\xi=1} \frac{s_0 + \xi^p s_p + \xi^{2p} s_{2p} + \cdots}{1 + \xi^p + \xi^{2p} + \cdots},$$

ou

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \frac{s_0 + s_p + s_{2p} + \cdots + s_{(n-1)p}}{n}.$$

Pour $p = 1$, cette dernière formule redonne celle de Cesàro. On peut faire à son sujet plusieurs remarques curieuses.

D'abord on peut la considérer comme un cas particulier des formules obtenues non pas en faisant tendre ξ vers la racine égale à 1 de l'équation $\xi^p - 1 = 0$ mais en faisant tendre ξ vers l'une quelconque des racines de cette équation, c'est-à-dire vers l'un des sommets d'un polygone régulier de p côtés inscrit dans le cercle $|\xi| = 1$.

Voici une remarque plus importante encore relative à la dernière formule donnée pour $F(x)$. Soit x à l'intérieur du cercle de convergence. Alors on peut prendre p assez grand pour que les sommes s_p, s_{2p}, ..., $s_{(n-1)p}$ diffèrent les unes des autres d'aussi peu qu'on voudra. Dans ces conditions la formule considérée peut s'écrire

$$F(x) = \lim_{n=\infty} \left[\frac{s_0}{n} + \frac{n-1}{n} s_{(n-1)p}\right]$$

c'est-à-dire

$$F(x) = \lim_{n=\infty} s_{(n-1)p}.$$

Ce n'est autre chose que la formule de Taylor elle-même qu'il est bien intéressant de retrouver directement comme cas particulier de formules plus générales étudiées dans ce travail.

A. Costabel (Montpellier).