SUR LA NATURE DES AXIOMES DE LA GÉOMÉTRIE

Autor(en): **Richard, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **9 (1907)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-10164

SUR LA NATURE DES AXIOMES DE LA GÉOMÉTRIE

On peut distinguer, au sujet des axiomes de la Géométrie, trois opinions philosophiques différentes. *L'empirisme, le nominalisme, le Kantisme*. La première considère les axiomes comme fournis par l'expérience, la seconde voit en eux des définitions, ou dans le langage philosophique, des jugements analytiques. Enfin pour Kant ces jugements ne sont ni expérimentaux, ni analytiques. Ce sont des jugements synthétiques à priori.

En cherchant à préciser davantage le sens de ces diverses opinions, au lieu de trois façons de voir, je suis conduit à en distinguer quatre.

1° La science géométrique est fondée sur des axiomes ou hypothèses arbitrairement choisies. Une proposition est dite vraie, si elle est une conséquence logique de ces hypothèses. Il y a alors une infinité de géométries, également vraies (séparément) mais contradictoires entre elles.

2° C'est l'expérience qui fournit les axiomes. La base de la science est ainsi expérimentale, son développement est déductif.

3° Les axiomes sont des définitions. On nomme droites, plans, distances, etc. des objets ou notions satisfaisant a ces axiomes. Comme on le verra tout à l'heure cette troisième façon de voir est totalement différente de la première.

4° Les axiomes ne sont ni expérimentaux, ni arbitraires. Ce ne sont point non plus des définitions. Ils s'imposent à nous non parce que l'expérience nous les fournit, mais parce que sans eux l'expérience serait impossible. C'est l'opinion Kantienne.

J'examine successivement ces quatre façons de voir.

I. — La première façon de voir peut être appelée *l'opinion logique*. Elle n'est nullement fausse, et il est nécessaire de l'adopter pour étudier les fondements de la géométrie. M. Hilbert, M. Peano, et les autres géomètres assez nombreux qui se sont livrés à cette étude, se sont placés à ce point de vue. Seulement la géométrie envisagée ainsi demeurera purement abstraite. Pour pouvoir l'appliquer à l'étude du monde extérieur il faut se placer à un point de vue différent.

II. — La seconde façon de voir est *l'empirisme*. On regarde les premières notions de la géométrie comme des notions expérimentales. Prenons la notion de distance, la plus simple de toutes. On la définira en se servant d'un corps solide invariable. Ceci n'est pas sans présenter quelques difficultés.

En premier lieu il paraît difficile de définir ainsi les très grandes distances, celles des astres par exemple. Cette difficulté est réelle, non insurmontable.

En second lieu on n'a pas de corps solide rigoureusement invariable. La distance est donc une notion un peu floue. De plus les corps se dilatent par la chaleur. Si l'on dit : cette barre de platine conservera *par définition* sa longueur partout, la distance ainsi définie ne possèdera pas les propriétés Euclidiennes. Si l'on dit : Cette barre de platine indiquera la distance après qu'on aura fait une correction de température, il faut définir pour que cela soit clair et la température, et la correction à faire. C'est d'une complication extravagante.

D'autre part si l'expérience seule nous démontre la vérité des axiomes, comment savons-nous qu'ils sont vrais partout. Et il y a dans l'espace d'immenses régions où les corps solides ne peuvent subsister. Une règle solide en platine, cela n'a de sens ni dans le soleil, ni dans les étoiles ou les nébuleuses.

Je laisse de côté bien d'autres difficultés. La géométrie purement empirique n'est pas soutenable. Nous verrons cependant qu'il s'introduit dans la géométrie, pour les applications un certain genre d'empirisme.

III. — D'après la troisième opinion les axiomes de la géométrie sont des *définitions*. On nomme droite, plan, distance etc. des objets auxquels s'appliquent les axiomes. Ceux-ci servent ainsi de définition aux notions premières.

Cette façon de voir est séduisante. Un philosophe irréfléchi l'adoptera sans hésiter. Or elle est radicalement fausse. Je vais montrer pourquoi.

J'aurai besoin de supposer définie la position d'un point. J'admettrai que la position d'un point peut être déterminée par la donnée de 3 nombres $\alpha\ \beta\ \gamma$. Je n'indique pas comment on peut, étant donné le point trouver ces 3 nombres. Cela importe peu. Je nomme ces 3 quantités les coordonnées provisoires du point.

Je prends maintenant 3 fonctions de $\alpha\ \beta\ \gamma$; je nomme ces fonctions X Y Z. Ce seront (je les appelle ainsi) les coordonnées définitives du même point.

Soient 2 points (X, Y, Z; X_0, Y_0, Z_0). Je nomme *distance* de ces deux points l'expression :

$$\rho = \sqrt{(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2}.$$

Nommons *plan*, l'ensemble des points dont les coordonnées X Y Z vérifient une équation du premier degré. Nommons *droite* l'intersection de deux plans ; *déplacements*, les transformations n'altérant pas la distance. Avec ces définitions toute la géométrie euclidienne s'établira sans peine. Les axiomes seront vrais.

Mais les fonctions X Y Z restent dans ce qui précède indéterminées. En changeant ces fonctions on a d'autres objets vérifiant les mêmes axiomes. Donc les axiomes ne définissent nullement les objets auxquels ils s'appliquent.

On peut encore montrer cela de la façon suivante. Les mots *droite, plan, etc.* ayant leur sens ordinaire, effectuons une transformation T. Changeons le sens des mots. Appelons *plans, droites* les figures transformées des plans et des droites par la transformation T. Appelons *déplacement* le transformé d'un vrai déplacement par la transformation T. Après ce changement du sens des mots la géométrie euclidienne subsistera. Les axiomes continuant à être vrais, bien que le sens des mots soit changé, sont impuissants à fixer ce sens.

IV. — Passons à *l'opinion kantienne.* C'est la plus ancienne, celle adoptée par Euclide et tous les anciens géomètres. Les axiomes sont évidents par eux-mêmes. Cette évidence selon Kant tient à la nature de notre esprit. La notion de l'espace préexiste à l'expérience ; *elle est une condition sans laquelle l'expérience serait impossible.*

Entrons dans quelques détails, pour bien montrer cela. A quelles conditions pouvons-nous parler d'une figure, d'un ensemble de points, à quelles conditions une figure peut-elle avoir des propriétés ?

Il faut pour cela dans cette figure quelque chose de permanent ; qu'on puisse la concevoir restant identique à elle-même. Le changement lui-même est inconcevable sans quelque chose de fixe, avec quoi on puisse comparer l'objet qui change. On ne peut même désigner la position d'un point dans l'espace, si l'on ne donne à ce point une certaine individualité. Je m'explique. Lorsque je dis : soit P un point, je suppose quelque chose en P ; une petite tache d'encre par exemple. Pendant que je parle la terre se déplace, et une petite tache d'encre occupe une position variable dans l'espace absolu. Cependant je considère P comme étant toujours le même point.

Dans la géométrie abstraite, c'est-à-dire envisagée d'une façon purement logique, le point est un être dont on ne spécifie pas la nature. L'espace au contraire se définit : « l'ensemble des points ».

Au contraire, dans la pratique on ne peut envisager ainsi l'espace, ce serait admettre la possibilité de définir l'immobilité absolue. Le point que je considère dans une épure est immobile sur ma feuille de papier ; il est invariable par rapport à celle-ci, mais entraîné dans l'espace avec elle. Ce n'est pas un point *de l'espace,* c'est un point *du papier.*

Il faut donc, même pour fixer la position d'un point, supposer l'existence de corps invariables, par rapport auxquels les points restent fixes, ou se déplacent.

La notion de figure invariable nous apparaît ainsi non comme un fait expérimental, mais comme une sorte de nécessité logique. *Si l'on n'admet pas cette notion, aucune géométrie n'est possible.*

Cette manière de voir semble donc se justifier assez bien. Il y a cependant des difficultés.

La notion d'invariabilité est, dans cette manière de voir une notion à priori. Les propriétés des figures invariables doivent donc s'en déduire sans qu'on soit obligé de faire intervenir l'expérience, et sans qu'il reste aucun arbitraire dans ces propriétés. En particulier, le postulatum d'Euclide doit être ou vrai ou faux. On ne peut plus dire le postulatum est vrai ou faux selon ce qu'on nomme figure invariable.

Cette difficulté est très grande ; elle a suffi à beaucoup de logiciens pour faire condamner l'opinion kantienne.

On peut présenter la chose autrement. La thèse kantienne est celle-ci : Les axiomes de la géométrie ne sont ni des hypothèses arbitraires, ni des résultats expérimentaux ; ce sont des principes sans lesquels la science de l'espace serait impossible.

L'objection est alors la suivante. Comment se fait-il qu'il y ait une géométrie non euclidienne ? Si le postulatum d'Euclide était nécessaire pour constituer la science de l'espace on ne saurait la constituer sans lui.

Je ne crois pas pourtant l'objection suffisante pour faire tomber la théorie kantienne. Elle oblige seulement à la modifier.

La théorie kantienne, du reste, manque un peu de précision. Il faut supposer, pour faire de la géométrie, la notion de figure invariable. Mais pourquoi faut-il précisément trois points pour fixer une pareille figure ? Pourquoi deux points ont-ils un invariant (la distance) et non pas deux ? etc. Pourquoi du reste l'espace a-t-il trois dimensions ?

J'ai examiné successivement les différentes opinions touchant les axiomes. Ces opinions ont toutes quelque chose d'inacceptable.

Pour chercher à sortir de ces difficultés, je présenterai les choses comme il suit : Comme on l'a vu, à propos de l'opinion kantienne, il est nécessaire pour la science, d'admettre l'idée d'un objet restant identique à lui-même. Acceptons donc cette notion, d'ailleurs familière à tout le monde, sans la discuter davantage.

Il faut toutefois, pour que cette notion ait un sens pratique, admettre l'existence réelle de corps restant identiques à eux-mêmes, de corps invariables. Je reviendrai tout à l'heure sur ce point.

Cette notion de l'identité de deux objets, ou d'un objet invariable est vague. Il importe de la préciser. C'est là le rôle des axiomes.

Les axiomes sont donc des propositions ayant pour objet de préciser la notion d'identité de deux objets préexistant en notre esprit.

Il y a des axiomes relatifs à la continuité. Ils ne souffrent aucune difficulté. L'axiome gênant est le postulatum d'Euclide. Il faut le rattacher à l'idée que nous nous faisons d'un objet restant identique à lui-même, *d'un corps invariable.*

Si tout grandissait proportionnellement, nous ne pourrions nous en apercevoir. C'est là une proposition de sens commun ; elle exprime une sorte de *relativité* dans la grandeur. Or, cela revient à affirmer le postulatum d'Euclide. Si le postulatum n'était pas vrai, deux triangles ayant les mêmes angles seraient égaux. On saurait donc qu'un triangle n'a pas changé par la seule mesure des angles. La relativité précédente n'existerait pas.

On peut dire encore. L'idée que nous avons de deux figures identiques est double. On a une première espèce d'identité, telle que deux points A et B ne forme pas toujours la même figure que deux points A′ B′. Deux points ont un invariant. C'est l'idée de *figures égales.* Il y en a une autre ou deux points n'ont pas d'invariant; c'est la *similitude.*

Cette double notion de l'identité impose le postulatum d'Euclide.

Je reparlerai plus loin du postulatum.

La géométrie ainsi établie est d'abord purement théorique. Elle devient pratique par la remarque suivante : Parmi les corps situés à notre portée, il en est qui demeurent très sensiblement invariables. Il reste quelque difficulté lorsqu'il s'agit de corps très éloignés, tels que les astres. Pour étudier ces corps, il faut se servir des rayons lumineux. La vérification expérimentale de cette proposition : « La lumière se propage en ligne droite, dans un milieu homogène » est insuffisamment précise. Il faut envisager les choses autrement.

La géométrie est la première d'une série de sciences, fondées sur des hypothèses d'un caractère très général, mais dont le développement est logique. Parmi ces sciences se trouve d'abord *la mécanique rationnelle*, puis *l'optique des ondulations*. Cette dernière science rend compte, d'une façon logique, de la propagation rectiligne de la lumière. On se sert du principe dit *des ondes enveloppes*. Avec cette manière de voir la propagation rectiligne de la lumière n'est plus purement empirique. Les raisons qui la font admettre dérivent bien de l'expérience, mais elles possèdent un caractère de généralité plus grand qu'une expérience directe. La principale de ces raisons est celle-ci : Dans le vide l'éther est homogène et isotrope. *C'est en quelque sorte une raison de symétrie.* L'optique fournit en outre un système de mesures absolues. Lord Kelvin a montré dans une de ses conférences, comment une personne transportée loin du système solaire, dans quelque planète du système de Sirius ou de Véga, pourrait, grâce aux propriétés des ondes lumineuses, reconstituer toutes les unités du système métrique ou du système CGS.

Il convient, d'après ce qui précède, d'envisager la géométrie, non comme une science de pure logique, mais comme une sorte d'introduction aux sciences de la nature, à la mécanique, à l'astronomie, à l'optique, et à toutes les branches des sciences physiques. Je ne considère pas les propositions géométriques comme d'une nature essentiellement différente de celles envisagées en physique. Comme ces dernières elles concernent des objets réels, concrets, existants, ou pouvant exister en dehors de l'esprit.

Expliquer l'univers matériel est le but de la science. Cette explication est, à l'heure actuelle bien loin d'être achevée. Cependant la partie déjà construite de la science possède une certaine ampleur. Elle comprend comme je l'ai dit la géométrie, la mécanique, l'optique vibratoire et d'autres parties des sciences physiques. Un coup d'œil jeté sur ces sciences y montre le rôle de la géométrie. Chaque partie de la science est un système fondé sur des hypothèses qui lui sont propres, mais outre ces hypothèses, celles de la géométrie sont toujours requises. La géométrie est comme la charpente, la carcasse, ou le squelette de la science.

Les hypothèses de la géométrie ont, comme nous l'avons dit un caractère particulier d'évidence. En fait on les admet dans le langage courant, et sans elles il serait pour ainsi dire impossible d'énoncer quelque proposition concernant l'espace. Les notions d'égalité, de similitude nous sont très familières. Si le postulatum d'Euclide paraît moins évident que les autres axiomes, cela tient à ce qu'il est mal choisi. Il peut être remplacé par une proposition équivalente, d'un caractère plus évident. On peut le remplacer par la possibilité des figures semblables, comme nous l'avons fait ci-dessus. On peut aussi le remplacer par le suivant: « si une figure plane est mobile dans son plan de telle sorte qu'une des droites de la figure glisse sur une droite fixe, tous les points de la figure décrivent des droites ». C'est la manière de faire de M. Méray. Si l'axiome en question n'était pas vrai, les tiroirs des tables ou des commodes impliqueraient contradiction.

On peut encore admettre, comme le fait je crois Legendre, l'axiome suivant. « Par un point pris dans un angle on peut toujours mener une droite rencontrant les deux cotés de l'angle » ou encore l'énoncé suivant: « Une droite ne peut s'éloigner ou s'approcher d'une autre, de façon que la distance d'un certain point de cette droite à l'autre soit maximum ou minimum ».

L'énoncé suivant: « Autant de triangles égaux qu'on voudra étant placés dans un plan, extérieurs les uns aux autres, on peut toujours les enfermer dans un triangle unique » possède un caractère d'évidence tout particulier.

Du reste la notion de volume telle qu'elle est familière à tout le monde suppose le postulatum d'Euclide. Elle suppose en effet un volume donné rempli de petits cubes juxtaposés. Or le pavage de l'espace avec de petits polyèdres tous égaux entre eux, suppose le postulatum d'Euclide. Il en est de même du reste du pavage du plan.

Pour exposer la géométrie, on peut procéder d'une façon très différente de la façon habituelle. En astronomie on mesure non des longueurs, mais des angles. On se fonde sur la propagation rectiligne de la lumière. Ceci suggère une façon d'exposer la géométrie en la fondant sur la notion d'angle et de ligne droite.

Ces notions étant considérées comme notions premières indéfinissables, ou, si on le préfère, comme des notions empiriques, on définira le plan comme de coutume.

Considérons deux figures se correspondant point par point, de façon que des points en ligne droite correspondent à des points en ligne droite. Si deux droites AB, AC de la première figure font le même angle que les correspondantes A′B′, A′C′ de la seconde, nous dirons que les deux figures sont coangulaires.

Soient A et B deux points d'une figure F, P un plan passant par AB, A′ et B′ *deux points quelconques,* P′ un plan passant par ces deux points. Notre principal axiome sera le suivant: on peut construire une figure F′, coangulaire à F, telle que A′ B′ P′ correspondent à A B P.

Si A coïncide avec A′ et B avec B′, ou si B coïncide avec A′ et A avec B′ on aura deux figures égales.

Cette manière de procéder présente des difficultés. Et il n'est pas question de s'en servir pratiquement pour exposer la géométrie, mais il donne lieu à une remarque assez curieuse, que je veux indiquer. Lorsque l'on adopte comme notion fondamentale la notion de distance, la définition de la droite s'en déduit, de même celle de l'angle, il n'y a plus rien d'arbitraire, le postulatum est vrai ou faux selon ce qu'on nomme distance.

Mais si l'on prend comme notion fondamentale la notion d'angle, la ligne droite ne se trouve pas définie, et l'on peut définir la droite de façon que le postulatum soit vrai ou qu'il soit faux. Le postulatum se trouve ainsi vrai par définition de la ligne droite.

Effectivement, supposant établie la géométrie ordinaire, considérons toutes les transformations n'altérant pas les angles.

D'après un théorème dû à Liouville, le groupe de ces transformations contient des combinaisons d'inversions, homothéties, symétries, inversions. Il change les sphères en sphères, et par suite les cercles en cercles. Une démonstration de ce théorème se trouve dans l'ouvrage de M. Darboux, sur les systèmes orthogonaux. J'en ai donné dans les nouvelles annales (1903) une autre démonstration fondée sur les formules de Codazzi.

Ce groupe de transformations contient un sous groupe formé des transformations laissant inaltérée une sphère S. Lorsque la sphère S est réelle, le groupe est un groupe *Lobatchefkien ;* lorsqu'elle se réduit à un point, le groupe est un groupe *Euclidien ;* lorsqu'enfin, elle est imaginaire, ce sera un groupe *Riemanien.* J'entends par là que ces groupes sont isomorphes des groupes de déplacements dans les géométries de *Lobatchefki,* d'*Euclide,* de *Riemann.* Les lignes isomorphes des droites sont les cercles orthogonaux à la shpère S.

On voit par là que, la notion d'angle étant admise, on est libre de choisir la notion de droite de façon à ce que l'une ou l'autre des trois géométries soit vraie ; adoptons celle d'Euclide. Considérons un des groupes Euclidiens. La sphère S se réduit à un point. Transformons le groupe par une inversion de pôle S. Nous aurons un autre groupe ne laissant inaltéré aucun point. Ce sera, par définition, le groupe des déplacements.

Ceci laisse subsister des difficultés. Nous sommes bien obligés pour étudier ces groupes de supposer établie la géométrie ordinaire.

On oppose quelquefois les propositions scientifiques aux propositions du langage courant. Les programmes de philosophie semblent même consacrer cette opposition. Ils contiennent un paragraphe intitulé : *La connaissance vulgaire et la connaissance scientifique.*

Si l'on se borne à considérer les propositions ayant un caractère géométrique, celles qui énoncent des relations de position, cette opposition n'existe pas. Prenons l'exemple de l'éclipse de soleil, donné par M. Leroy, et discuté par M. Poincaré, dans son livre sur la « Valeur de la Science ». L'ignorant dit : *Il fait noir ;* le savant dit : *l'éclipse a lieu a deux heures*. Cette manière d'opposer la connaissance vulgaire à la connaissance scientifique ne me paraît pas juste. Je ne veux pas en faire une longue critique. Une éclipse résulte d'une relation de position entre trois objets. *Il y a un écran devant la lampe,* est une proposition vulgaire. *La lune passe devant le soleil,* est une proposition de connaissance scientifique ; *il fait noir* est la constatation d'une sensation, non d'une connaissance, ni vulgaire ni scientifique.

Si la lune devant le soleil est quelque chose de plus scientifique qu'un écran devant une lampe, cela tient à bien des raisons qui sautent aux yeux, cela n'empêche pas les deux faits d'être de même nature : Une relation de position entre trois objets dont l'un est lumineux, l'autre opaque et le troisième l'œil d'un observateur.

J. Richard (Dijon).

ENQUÊTE SUR LA MÉTHODE DE TRAVAIL DES MATHÉMATICIENS

LES RÉSULTATS [1] — X

Questions 22 et 23.

Questions relatives au mode de vie du mathématicien [2].

22. — *Croyez-vous utile au mathématicien d'observer quelques règles particulières dans l'hygiène : régime, heures des repas, intervalles à observer ?*

---

[1] Voir l'*Ens. math.*, 7e année, n° 5, p. 387-395 ; n° 6, p. 473-478, 1905. — 8e année, n° 1, p. 43-48 ; n° 3, p. 217-225 ; n° 4, p. 293-310 ; n° 5, p. 383-385 ; n° 6, p. 463-475, 1906. — 9e année, n° 2, p. 123-135, n° 3, p. 204-217 ; n° 4, p. 306-312, 1907.

[2] L'étude de cette dernière partie a été faite par M. le Dr Ed. Claparède, Directeur du Laboratoire de Psychologie de l'Université de Genève.