Forces centrales.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **9 (1907)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

données x et y, ces formules nous donnent les invariants suivants :

$$\frac{V^2}{F_n} \quad \text{et} \quad \frac{1}{F_t}\cdot\frac{dV}{dt},$$

parce que nous àvons :

$$\frac{V^2}{F_n} = \frac{\rho}{m} \quad \text{et} \quad \frac{1}{F_t}\frac{dV}{dt} = \frac{1}{m}.$$

Si la masse m est une fonction quelconque des coordonnées x et y, nous n'avons que l'invariant $\frac{mV^2}{F_n}$, qui est égal au rayon de courbure de la trajectoire. Ce sont là *des invariants relatifs à toute trajectoire correspondante à des conditions initiales quelconques; nous faisons exception des trajectoires passant par des points singuliers des quantités considérées* [1].

Forces centrales.

7. Nous allons maintenant présenter un autre invariant beaucoup plus intéressant que les précédents et concernant seulement les forces centrales ; son importance consiste en ce qu'il s'exprime par la force elle-même qui est donnée comme une fonction des coordonnées x et y du mobile, contrairement aux invariants signalés au paragraphe précédent, qui sont exprimés par des composantes de la force suivant la normale et la tangente de la trajectoire. C'est, en effet, un inconvénient d'avoir les invariants exprimés par des composantes de la force qui exigent une certaine connaissance d'une trajectoire, généralement inconnue ; cela tient à ce que nous nous proposons comme but principal des applications des invariants à la recherche géométrique des trajectoires, lorsque la force est donnée comme fonction des coordonnées x et y.

Le mathématicien Resal a communiqué autrefois à l'Académie des sciences de Paris (Comptes rendus, tome XC; page 769) un théorème intéressant sur une loi relative à une force centrale. Ce théorème est le suivant :

---

[1] Ces points singuliers sont les points d'une trajectoire possédant plusieurs rayons de courbure (points multiples à tangentes distinctes ou non).

« *La force centrale produisant le mouvement d'un point est* « *proportionnelle à la quantité :* $\frac{V^3 . r}{\rho}$, V *désignant la vitesse* « *du mobile,* r *sa distance au centre des forces,* ρ *le rayon de* « *courbure de la trajectoire.* »

Nous arrivons très aisément à ce théorème par une comparaison des formules donnant l'intensité d'une force centrale et la vitesse du mobile en coordonnées polaires, avec la formule bien connue qui donne le rayon de courbure d'une trajectoire plane en coordonnées polaires, en prenant comme pôle le centre fixe de la force. Nous savons, en effet, que le rayon ρ de courbure d'une courbe plane est donné par la formule :

$$(2) \qquad \rho = \frac{\left(u^2 + \frac{du^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{u^3\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right)} , \qquad \left[u = \frac{1}{r}\right]$$

r et θ désignant les coordonnées polaires, quel que soit le point pris comme pôle.

En prenant comme pôle le centre de la force centrale, nous avons les formules classiques suivantes, qui donnent l'intensité de la force et la vitesse du mobile aussi en coordonnées polaires, savoir :

$$(3) \qquad V^2 = K^2\left(u^2 + \frac{du^2}{d\theta^2}\right) , \quad F = - mK^2u^2\left[u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right] ,$$

où V désigne la vitesse du mobile, F l'intensité de la force, et K la constante des aires. Nous n'avons qu'à éliminer les quantités

$$u^2 + \frac{du^2}{d\theta^2} \quad \text{et} \quad u + \frac{d^2u}{d\theta^2}$$

entre les formules (2) et (3) pour obtenir la formule suivante :

$$(4) \qquad \rho = -\frac{m}{K}\frac{V^3}{uF} \quad \text{ou} \quad \rho = -\frac{m}{K}\frac{V^3 . r}{F}$$

qui est la conséquence des égalités :

$$\left(u^2 + \frac{du^2}{d\theta^2}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{V^3}{K^3} , \quad u^3\left(u + \frac{d^2u}{d\theta^2}\right) = -\frac{Fu}{mK^2} .$$

La formule (4) qui nous conduit immédiatement au théorème de Resal énoncé plus haut, peut s'écrire aussi de la façon suivante :

$$(5) \qquad \frac{-\mathrm{K}\rho}{mr} = \frac{\mathrm{V}^3}{\mathrm{F}}$$

et nous permet de conclure que la quantité mécanique $\mathrm{V}^3\,\mathrm{F}$ est un *invariant relatif à toute trajectoire du mobile*, quelles que soient les conditions initiales, si la masse m est supposée constante ou bien une fonction uniforme des coordonnées x et y du mobile ; cela tient à ce que les quantités géométriques ρ et Y n'ont qu'une valeur bien déterminée à chaque point de la trajectoire, tandis que K est une constante.

8. Nous allons maintenant simplifier beaucoup cet invariant $\mathrm{V}^3\,\mathrm{F}$ en appliquant la formule classique suivante :

$$(6) \qquad \mathrm{P}\,\mathrm{V} = \mathrm{K}\,,$$

qui exprime le théorème des aires, P désignant la distance du centre de la force à la tangente de la trajectoire en chaque point et K la constante des aires ; cette formule nous permet de conclure que la vitesse V est aussi un invariant relatif à la trajectoire, puisque la quantité géométrique P n'a qu'une valeur unique à chaque point de la trajectoire, sauf quelques points singuliers de la courbe.

Nous en concluons que, lorsque le mouvement est périodique, il n'est jamais rétrograde, et, en général, le mobile revient à un point de la trajectoire toujours avec la même vitesse.

Mais l'invariant le plus important pour le but que nous poursuivons, est celui que nous déduisons par la combinaison des deux invariants précédents, c'est l'intensité F de la force ; il n'y a qu'à éliminer la vitesse V entre les égalités (5) et (6) pour avoir la formule suivante :

$$(7) \qquad \mathrm{F} = -\,m\mathrm{K}^2\,\frac{r}{\rho\mathrm{P}^3}$$

qui nous donne l'intensité F de la force en fonction rationnelle de quantités, qui n'ont qu'une valeur unique et bien déterminée à chaque point de la trajectoire. Si nous excluons donc les trajectoires ayant des points *singuliers à plusieurs rayons de courbure ou tangentes*, pour toutes les autres nous aurons pour l'intensité F une succession de valeurs continue et bien déterminée et le théorème suivant :

THÉORÈME. « *L'intensité d'une force centrale est un invariant relatif à toute trajectoire du mobile n'ayant aucun* « *point singulier à plusieurs rayons de courbure*[1] *ou bien* « *plusieurs tangentes.* »

L'existence de points de la trajectoire, où la force F devient infinie ne gêne pas ; il suffit que l'intensité de la force y soit *toujours* infinie.

L'importance de ce théorème consiste en ce que j'ai en vue des problèmes où la force est donnée comme fonction des coordonnées x et y et, par conséquent, la connaissance de cet invariant nous donne des renseignements quelquefois précieux sur la trajectoire inconnue. Ainsi, si l'intensité de la force n'est pas un invariant par rapport à une trajectoire, cette trajectoire, doit avoir des points singuliers à plusieurs rayons de courbure ou tangentes. *Les points de la trajectoire, où l'intensité de la force prend plusieurs valeurs pendant le mouvement supposé périodique, coïncident avec les points singuliers à plusieurs rayons de courbure ou tangentes.* Des tels points singuliers sont, par exemple, les points multiples à tangentes distinctes ou non. La même formule (7) montre que le sens de la force est aussi un invariant relatif à la trajectoire, puisque le signe du second membre de (7) ne change pas d'après nos hypothèses.

Applications.

9. — Pour comprendre l'intérêt de la théorie exposée dans les chapitres précédents, nous citerons quelques applications se rapportant aux problèmes où la force est donnée par une fonction multiforme des x et y et nous nous propo-

[1] La formule (7) montre, en effet, que la force F ne saurait avoir plusieurs valeurs qu'aux points singuliers de la trajectoire, où il en est ainsi du rayon ρ ou de la quantité P. Nous ne parlons pas de la direction de la force, parce que elle reste évidemment invariable.