SUR LES ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES ORDONNÉS

Autor(en): **Combebiac, G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **8 (1906)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **02.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-9266

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SUR LES ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES ORDONNÉS

Au moment où la théorie des ensembles tend à constituer le fondement même des mathématiques, il ne paraîtra peut-être pas sans intérêt de rechercher s'il ne serait pas avantageux de modifier légèrement le point de vue auquel s'est placé G. Cantor pour l'exposé des éléments de la théorie des ensembles ordonnés. Cet exposé gagnerait à notre avis, une allure plus naturelle si l'on rapportait la notion d'ordre, qui en est la base, à la notion plus générale d'inclusion.

Pour effectuer cette transposition, il suffit de remarquer qu'il est équivalent de dire qu'un élément déterminé m_1 d'un ensemble M précède un autre élément déterminé m_2 ou que l'ensemble des éléments qui précèdent m_1 est inclus dans l'ensemble des éléments qui précèdent m_2. Il résulte de cette remarque que « ordonner un ensemble M, c'est définir des « ensembles formés d'éléments de M (ou *sous-ensembles* de « M), tels que deux quelconques de ces ensembles donnent « toujours lieu à une relation d'inclusion ».

Soit S un ensemble de sous-ensembles de M satisfaisant à la condition qui vient d'être énoncée (ces sous-ensembles seront dits les *termes* de S). A tout élément m de M correspond un ensemble $G(m)$ (évidemment fonction de m) formé de tous les éléments qui appartiennent à l'un au moins des termes de S n'admettant pas m comme élément; on peut également distinguer l'ensemble $F(m)$ formé par les éléments de M qui appartiennent aux mêmes termes de S que m. Enfin on peut en outre considérer l'ensemble $G'(m)$ composé des ensembles $G(m)$ et $F(m)$. Ces divers ensembles sont parfaitement définis; car chacune des qualités qui les caractérisent appartient ou n'appartient pas à tout élément déter-

miné de M. L'ensemble F(m) correspond à l'idée de *coupure*, qui ne saurait être conçue en dehors de l'idée d'ordre ; les ensembles G(m) ou G'(m) représentent la *grandeur*, à laquelle donne lieu toute relation d'ordre.

Si l'on exprime par le signe [1] $<$ la relation d'inclusion sans identité d'un ensemble dans un autre, on démontre que la condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments déterminés m_1 et m_2 de M soient tels qu'il existe un terme au moins de S admettant m_1 et non pas m_2 est :

$$G(m_1) < G(m_2) \quad \text{ou} \quad G'(m_1) < G'(m_2) .$$

De même, la condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments m_1 et m_2 appartiennent aux mêmes termes de S consiste dans l'identité de G(m_1) et G(m_2) ou bien encore de G'(m_1) et G'(m_2).

La relation exprimée dans la théorie de l'ordre par les mots « compris entre » est évidemment directement applicable. Les ensembles G(m) et G'(m) sont toujours des termes de la suite [2] S si celle-ci est *partout disjointe*, c'est-à-dire si les termes compris entre deux quelconques des termes de S sont en nombre fini (sans exclusion du nombre zéro). Dans le cas où la suite S est *partout compacte*, c'est-à-dire où deux termes quelconques en comprennent toujours d'autres, G(m) et G'(m) ne peuvent pas faire partie à la fois de cette suite ; mais ces derniers ensembles n'en sont pas moins parfaitement définis.

Si l'on appelle *champ* d'une suite d'ensembles l'ensemble formé par les éléments qui appartiennent à l'un au moins des termes de cette suite, il est clair que toute suite d'ensembles, même dépourvue de dernier terme, donne lieu à un champ, et l'on obtient ainsi la définition la plus naturelle de la limite d'une suite sans dernier terme ; la notion de limite se trouve ainsi établie d'une manière plus générale et surtout plus directe que par la méthode habituelle, et il

[1] La signification habituelle de ce signe n'est qu'un cas particulier de celle-ci par suite de l'équivalence des idées d'ordre et d'inclusion.

[2] Nous dirons, pour abréger le discours, que des ensembles tels que deux quelconques d'entr'eux donnent toujours lieu à une relation d'inclusion forment une *suite*.

suffit de *démontrer* la propriété qui, dans cette méthode, sert de définition. On se trouve ensuite naturellement amené à la considération des notions introduites par G. Cantor : ensembles enchaînés, parfaits, etc., en adjoignant au besoin, aux termes de la suite S, d'autres ensembles dont chacun doit posséder la propriété de contenir les ensembles $G'(m)$ relatifs à tous ses éléments. G. COMBEBIAC (Bourges).

SUR UNE EXTENSION POSSIBLE DE LA NOTION DE VRAIE VALEUR

Toute collection de faits analytiques conduit à un essai de coordination et cet essai peut quelquefois aboutir à l'établissement d'une théorie. C'est ainsi que des faits analytiques relatifs aux séries divergentes ont conduit tout récemment d'illustres mathématiciens à poser les premiers fondements d'une théorie des séries divergentes.

Je me propose de montrer, dans cette note, comment quelques faits analytiques semblent indiquer une *extension possible de la notion de vraie valeur.*

I.—Prenons d'abord le problème ordinaire de la vraie valeur.

Considérons une fonction définie par une certaine expression analytique $F(x)$. Il peut arriver que pour une certaine valeur $x = a$, de la variable, l'expression analytique $F(x)$ cesse d'avoir un sens : la fonction n'est donc pas définie au point $x = a$. Pour la définir on regarde si l'expression analytique $F(x)$ tend vers une valeur limite lorsque x tend vers a. Si cette valeur existe et si elle est égale à A on convient de poser, par définition,

$$F(a) = A$$

et c'est ce nombre A qu'on appelle *vraie valeur* de $F(x)$ au point $x = a$.

On voit donc que pour définir la fonction considérée au