est déduite de la méthode des essais, ou d'une manière plus précise de la méthode de la formation graduelle de l'inconnue d'après les conditions du problème.

V. Bobynin (Moscou).

(Traduction de M. E. Papelier, Orléans.)

GÉOMÉTRIE APPLIQUÉE

LA THÉORIE DES ROTATIONS ET LE NIVEAU A BULLE

Théorème I. (Principe des deux demi-tours). — Soient OV_1 et OV_2 deux axes concourants. Pour déplacer un solide par un demi-tour sur l'axe OV_1, on peut déplacer le solide par un demi-tour sur l'axe OV_2 suivi d'une rotation égale à 2 fois l'angle V_2OV_1 exécutée autour d'une perpendiculaire au plan des axes.

Remarque. La démonstration est immédiate; on peut aussi regarder cette proposition comme un cas particulier de la combinaison de deux rotations successives finies.

Soit à composer ces deux mouvements d'une figure sphérique : 1° une rotation λ_2 exécutée autour du pôle P_2 ; 2° une rotation λ_1 exécutée autour du pôle P_1.

On construit un triangle sphérique de base P_2P_1 dont le côté $\overrightarrow{P_2M}$ issu du pôle de la première rotation, est sur l'arc de grand cercle obtenu en faisant tourner l'arc $\overrightarrow{P_2P_1}$ autour de P_2 de l'angle $-\frac{1}{2}\lambda_2$ et dont le côté P_1M issu du pôle P_1 est sur l'arc de grand cercle obtenu en faisant tourner l'arc $\overrightarrow{P_1P_2}$ de l'angle $+\frac{1}{2}\lambda_1$ autour de P_1.

M est le pôle de la rotation équivalente aux deux rotations successives et son amplitude est l'angle extérieur $\sphericalangle\, xMP_1$

Mx étant le prolongement de l'arc P_2M.

Théorème II. (Principe des deux quarts de tour). — Soient dans l'espace deux axes concourants OV_1 et OV_2 et donnons à un solide le déplacement de un quart de tour sur OV_1. Ce déplacement peut être obtenu par un quart de tour sur OV_2, suivi 1° d'une rotation V_2OV_1 autour d'une perpendiculaire au plan V_1OV_2 et 2° d'une rotation de même amplitude autour d'une perpendiculaire à OV_1 menée par O dans le plan V_1OV_2.

La démonstration se fait immédiatement en considérant le solide comme défini par deux demi-barres assemblées, dont les positions initiales seraient précisément OV_2 et OV_1.

Théorème III. — Soient P et Q deux points d'une surface sphérique dont la distance angulaire est i (mesurée avec l'unité trigonométrique des angles).

Une rotation j' d'une figure sphérique autour du pôle Q peut être remplacée par une rotation j autour du pôle P suivie d'une rotation j'' autour d'un point H situé sur l'arc de grand cercle dont P est le pôle.

Or le triangle PQH nous donne :

$$\sin\frac{1}{2}\,Oj' = \frac{\sin\frac{1}{2}j}{\sin HQ} = \frac{\sin\frac{1}{2}j''}{\sin i}.$$

Supposons maintenant les angles i et j fort petits ;
on aura $j' = j$, à des quantités près de l'ordre de ji^2 ;
sensiblement $[j' = j + \frac{1}{2}mji^2]$;
m étant voisin de 1.
et, ... $j'' = ij' = ij$, à des quantités près de l'ordre de $ij'\,i^2$.

* * *

Application des théorèmes précédents au problème suivant : Rendre vertical l'axe de pivotement d'un solide, par exemple un théodolite.

On suppose que l'on dispose d'un niveau à bulle, porté par l'instrument. Le niveau à bulle consiste essentiellement en une surface en verre, de révolution et de très petite courbure méridienne :

$$\frac{1}{200^{m}} \text{ ou } \frac{1}{400^{m}} .$$

L'intérieur de cette surface est remplie d'éther dont une bulle de vapeur se place symétriquement dans un plan méridien vertical; le milieu de cette bulle définit un point du solide de verre où la tangente à la méridienne de la fiole est horizontale.

Le niveau est toujours placé de manière que l'axe de révolution de la surface graduée de la fiole soit *à peu près* horizontal, l'axe de la fiole constitue *la base* du niveau.

Supposons *le niveau* du théodolite ayant sa base *à peu près* parallèle à la droite OA qui joint le pied O de l'axe à une vis A du trépied de l'instrument. L'axe étant placé, *à l'œil*, à peu près vertical, supposons d'abord que l'on donne à l'appareil une rotation exacte d'un demi-tour autour de son axe et cherchons à prévoir le déplacement qui va en résulter pour la bulle.

Soit OV_3 l'axe de l'instrument, OV_2 sa projection sur le plan vertical mené par OA et soit OV_1 la verticale menée par O soit $\sphericalangle V_1 OV_2 = i$ et $\sphericalangle V_2 OV_3 = k$.

D'après le théorème I le demi-tour sur OV_3 est remplaçable par un demi-tour sur OV_2, suivi d'une rotation $2k$ autour de la droite Ox perpendiculaire au plan $V_2 OV_3$, c'est-à-dire presque parallèle à OA. La tangente à la méridienne de la fiole en la première position de l'appareil fait un angle α très petit avec l'axe Ox et cette tangente par la rotation $2k$ va faire avec sa direction primitive un angle β dont la moitié a pour sinus

$$\sin\alpha \sin k \qquad \text{c'est-à-dire que sensiblement } \beta = 2k\alpha .$$

Voyons maintenant l'effet du demi-tour sur OV_2 ; ce dernier peut être remplacé par un demi-tour sur OV_1 et par une rotation d'amplitude $2i$ autour de l'horizontale perpendiculaire au plan vertical OA. Celle-ci aura pour effet de déplacer la division d'arrêt de la bulle presque dans le même plan méridien de la fiole et d'un angle égal à $2i$; si donc le demi-tour effectuée on agit sur la vis A de manière à ramener la bulle de la moitié de son déplacement, on redressera la droite de OV_2 vers OV_1, *et très sensiblement de l'angle i.* D'après le théorème III, nous pouvons en effet très sensiblement remplacer la rotation $2k$ autour de Ox : 1° par une rotation sensiblement égale autour de l'axe de la fiole, rotation qui change le plan méridien de la fiole sans changer les rangs des divisions tangentes à la bulle, et 2° par une rotation autour d'un axe perpendiculaire à l'axe de la fiole et sensiblement égal à $2\gamma k$, γ étant l'angle de l'axe de la fiole et de Ox, ce qui produira un déplaeement d'orientation de l'ordre de γk, lequel est négligeable *si l'une ou l'autre des quantités γ ou k est comparable à i.*

Supposons que la rotation réalisée autour de OV_3 ne soit pas exactement de 1 demi-tour, mais un demi-tour plus une petite rotation résiduelle δ.

Soit l l'angle $V_3\,OV_1$, la rotation résiduelle δ sur OV_3 peut être remplacée par une rotation sensiblement égale à l autour de OV_1 et par une rotation sensiblement égale δl autour d'une horizontale ; celle-ci sera négligeable si δ ou l est de l'ordre de i ou ce qui revient au même si k ou δ est de l'ordre de i (car $l < i + k$).

La correction i ayant été effectuée, comme on l'a dit, pour ce qui est de sa valeur principalc par la vis A, on achève de produire le retour de la bulle à sa position médiane en agissant sur la vis propre du niveau, ce qui a pour effet de rendre en cette position l'axe de la fiole horizontal. La projection de l'axe sur le plan vertical OA est alors verticale.

Pour achever le réglage de l'axe de l'appareil, on fait tourner l'appareil autour de son axe, de 1 quart de tour. Supposons d'abord que cette rotation exécutée sur OW_2 soit exactement de 1 quart de tour, elle équivaut à 1 quart de tour sur OV_1 suivi 1° d'une rotation K autour de OA et 2° d'une rotation K autour d'une droite OY^1 située dans le plan OV_1 perpendiculaire à OW_2, le quart de tour sur OV_1 ne déplace pas la bulle, la première rotation K déplace la bulle de l'angle K, la deuxième rotation K autour de OY^1 qui est l'axe de la fiole, modifie le méridien central de la bulle, mais sans modifier les divisions tangentes extrêmes, la première rotation sur OA déplace la bulle de l'angle K.

On la ramène à sa position primitive, en agissant sur les vis B et C, mais en sens inverse et de quantités égales pour laisser la direction OA invariable.

Si enfin le quart de tour n'est pas rigoureusement exact et s'il comporte une petite rotation résiduelle ε autour de OW_2, celle-ci peut être remplacée par une rotation ε autour de OV_1 et par une rotation εK autour d'une horizontale voisine de OY, dont l'effet est négligeable vis-à-vis de l'effet principal K.

La première est d'ailleurs sans action sur la bulle.

On voit comment la théorie élémentaire des rotations fait claire et précise la méthode opératoire du réglage des appareils de positions à axe vertical.

Jules ANDRADE (Besançon).

SUR LA CONVERGENCE ABSOLUE DES SÉRIES

Les mathématiciens recherchent avec raison la précision et la rigueur des termes. Dans cette voie, il peut être intéressant d'appeler leur attention sur un langage impropre consacré par l'usage, mais qu'il est aisé d'améliorer comme je vais l'expliquer.

On adopte en général, pour les séries, les énoncés suivants :

DÉFINITION. — *Une série convergente est dite* absolument convergente *si la série des modules de ses termes est aussi convergente. La série proposée est* semi-convergente *si la série des modules est divergente.*

THÉORÈME. — *On n'altère pas la valeur d'une série absolument convergente en changeant l'ordre des termes. On peut altérer arbitrairement la valeur d'une série semi-convergente en changeant l'ordre de ses termes.*