

1. Sur les formules de Bonnet, Enneper et Kommerell.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

1. Sur les formules de Bonnet, Enneper et Kommerell.

La formule de *Bonnet* :

$$\frac{1}{R} \pm \frac{d\omega}{ds} = \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \sin \varphi \cos \varphi \quad (1)$$

qui détermine la torsion géodésique de toute courbe d'une surface, comprend, comme cas particuliers, celles d'*Enneper* pour les lignes asymptotiques :

$$R = \pm \sqrt{-\rho_1 \rho_2} \quad (2)$$

et de *M. Kommerell* pour les géodésiques (*Archiv der Math. und Physik*, 3^e Reihe, B. I, S. 116-7) :

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} \right) \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho} \right); \quad (3)$$

mais cette circonstance apparaît bien plus clairement, si l'on donne à la formule de Bonnet (1) une autre forme. En effet, éliminons φ entre (1) et l'équation :

$$\frac{\cos \omega}{\rho} = \frac{\cos^2 \varphi}{\rho_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{\rho_2};$$

on a :

$$\frac{\cos \omega}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} = \sin^2 \varphi \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right), \quad \frac{1}{\rho_2} - \frac{\cos \omega}{\rho} = \cos^2 \varphi \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right),$$

d'où la formule (1) se transforme en la suivante :

$$\left(\frac{1}{R} \pm \frac{d\omega}{ds} \right)^2 = \left(\frac{\cos \omega}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} \right) \cdot \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{\cos \omega}{\rho} \right); \quad (1')$$

sous cette forme, on voit tout de suite qu'elle comprend la formule (2) pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, et la formule (3) pour $\omega = 0$. Plus généralement, pour les courbes $\omega = \text{const.}$, elle devient :

$$\frac{1}{R^2} = \left(\frac{\cos \omega}{\rho} - \frac{1}{\rho_1} \right) \left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{\cos \omega}{\rho} \right). \quad (1'')$$

Enfin, pour les lignes de courbure, elle donne le théorème dit de *Lancret* :

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{d\omega}{ds}.$$

A propos de la démonstration des formules (1), (2) et (3), je voudrais observer que la manière la plus courte de la faire, c'est de partir des équations :

$$\cos \omega = \frac{\zeta - p\xi - q\eta}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

ou :

$$\lambda = \frac{\pm p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \mu = \frac{\pm q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \nu = \frac{\mp 1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

ou enfin :

$$\xi = \frac{\pm p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \eta = \frac{\pm q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad \zeta = \frac{\mp 1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

respectivement, que l'on différentie et ajoute.

2. Remarque sur les lignes de courbure.

Dans toute ligne de courbure on a :

$$\frac{1}{R} = \pm \frac{d\omega}{ds},$$

d'où :

$$\omega = \pm \int \frac{ds}{R} + c;$$

d'autre part :

$$\rho_1 \cos \omega = \rho,$$

ou :

$$\frac{\cos \omega}{\rho} = \frac{1}{\rho_1},$$

Donc :

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{\cos\left(\pm \int \frac{ds}{R} + c\right)}{\rho},$$

et de même :

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{\cos\left(\pm \int \frac{ds'}{R'} + c'\right)}{\rho'}.$$

3. Quand la trajectoire d'un mobile est plane, l'hodographe l'est aussi, quel que soit le mouvement, car de la relation :

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

on tire :

$$A \frac{dx}{dt} + B \frac{dy}{dt} + C \frac{dz}{dt} = 0;$$