BIBLIOGRAPHIE

E. Bardey. — **Anleitung zur Auflösung eingekleideter Aufgaben.** Zweite, völlig umgearbeitete Auflage, von Fr. Pietzker. — 1 vol. in-8° cart. 160 p.; prix: Mk. 2,60. B.-G. Teubner, Leipeig, 1903

Ce livre n'est pas un simple recueil d'exercices, mais un guide méthodique ayant pour objet l'étude de la mise en équation des problèmes de l'Algèbre élémentaire. L'auteur examine neuf catégories de problèmes appartenant les uns aux mathématiques pures, les autres aux sciences appliquées. Chaque catégorie comprend un certain nombre de problèmes étudiés d'une manière très approfondie.

Nous devons ajouter que cette nouvelle édition diffère entièrement de la précédente. M. Pietzker ne s'est pas contenté de surveiller simplement la réimpression de l'ouvrage; il a entièrement remanié l'exposé, de manière à en faire réellement un guide utile à la fois aux maîtres et aux élèves.

Eug. Beltrami. — **Opere Matematiche**, publicate per cura della Facultà di Scienze della R. Università di Roma. Tomo primo; con Ritratto e Biographia dell' Autore. — Un vol, in-4°, XXII-437 p.; prix : L.25; Ulr. Hœpli, Milan, 1902.

La Faculté des Sciences de l'Université de Rome et les savant italiens ne sauraient élever à la mémoire d'Eugène Beltrami un monument plus digne que celui que constitue la publication des œuvres complètes de l'illustre géomètre. De même que les travaux de Brioschi, ceux de Beltrami vont être réunis en une série de beaux volumes in-4°, sortant des presses de la Tipographia Matematica de Palermo, et édités par la maison Hœpli, à Milan.

En tête de ce premier volume, figure une belle notice dans laquelle M. Cremona caractérise en quelques pages la vie et l'œuvre du grand geomètre. Puis viennent les mémoires, au nombre de 26, que publia Beltrami, de 1861 à 1868, dans les *Annali di Matematica*, le *Giornale di Matematiche*, les *Rendiconti*, les *Nouvelles Annales*, etc... Ces premiers mémoires appartiennent au domaine de la Géométrie et principalement à celui de la Géométrie infinitésimale. On y trouve, entre autres, les mémoires suivants, qui ont été le point de départ d'importants travaux entrepris par d'autres savants : *Ricerche di Analisi applicata alla Geometria; Sulla flessione delle superficie rigate; delle variabili complesse sopra una superficie qualunque; Saggio d'interpetrazione della Geometria non-euclidea; Teoria fondamentale degli spazi di curvatura costante.*

Nous devons nous borner à cette énumération. Les lecteurs trouveront d'ailleurs au tome II de cette Revue (année 1900, p. 173-178); une notice sur *Eugène Beltrami, sa vie et ses travaux*, par M. Frattini; elle est suivie de la liste des *publications du Professeur E. Beltrami.*

H. Fehr.

EMM. CZUBER. — **Probabilités et moyennes géométriques,** traduit de l'allemand par SCHUERMANS. — Gr. in-8°, 244 p.; prix : 8 fr. 50, Hermann, Paris, 1902.

Cet ouvrage a pour objet principal de grouper la classe nombreuse des problèmes de probabilités où les cas possibles constituent un domaine continu.

Pour la plupart d'entre eux, les données sont d'ordre géométrique, ou bien les énoncés sont susceptibles de représentation géométrique, et c'est ce caractère qui a déterminé le titre du livre.

Les questions traitées, ainsi que les méthodes employées, sont fort attrayantes et me paraissent présenter au plus haut degré le caractère de « récréations mathématiques ». Ce n'est pas un des moindres attraits de ces questions que la diversité des solutions qu'elles comportent suivant les conventions que l'on adopte pour l'évaluation de la probabilité ou plutôt pour la définition de l'égalité de probabilité.

Pour un très grand nombre de problèmes, il n'eût peut-être pas été inutile d'indiquer chaque fois les conventions admises et les conditions matérielles susceptibles de leur correspondre.

Parfois, la convention s'impose naturellement.

Ainsi, si un point est assujetti à l'unique condition de se trouver sur une ligne de longueur L, on convient, l et l' étant les longeurs de deux segments de cette ligne comptés à partir de l'une de ses extrémités, que les probabilités pour que le point se trouve d'une part entre les points l et $l+dl$, d'autre part entre les points l' et $l'+dl$ sont égales, de sorte que la probabilité pour que le point se trouve entre les points l et $l+dl$ est exprimé par le rapport $\frac{dl}{L}$.

En vertu d'une convention analogue, si un point est assujetti à se trouver à l'intérieur d'une surface d'étendue S, la probabilité pour qu'il se trouve à l'intérieur d'un élément de superficie ds est exprimée par le rapport $\frac{ds}{S}$

Mais cette simplicité est loin de se retrouver dans tous les problèmes et les rapprochements que nous pourrions faire entre certaines solutions (notamment entre celles des problèmes VII et X) montreraient que les méthothodes appliquées supposent, sans que le lecteur en soit prévenu, des conventions divergentes dans la définition de l'égalité de probabilité.

Au point de vue de l'élégance des méthodes et des résultats, nous mentionnerons spécialement les questions relatives à la position d'une droite arbitraire par rapport à des contours fermés.

Nous signalerons encore les questions où, non seulement le nombre des cas possibles est infini, mais encore où leur domaine devient lui-même infini, tels que les problèmes qui reposent sur la probabilité de la réalité des racines d'une équation du second degré, dont les coefficients peuvent prendre toutes les valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$.

Disons en terminant que nous aurions quelques réserves à faire sur les qualités de la traduction. G. COMBEBIAC (Limoges).

E.-A. FOUËT. — **Leçons élémentaires sur la théorie des fonctions analytiques.** 1re Partie (Chapitre I à V). — Un vol., grand in-8°, 330 p.; avec 359 fig.; prix : fr. 7 20. Paris, Gauthier-Villars, 1902.

L'auteur des leçons élémentaires s'adresse plus particulièrement aux étudiants des Facultés des Sciences, mais son livre rendra de réels services à tous ceux qui désireront acquérir une vue d'ensemble sur l'état actuel de la théorie des fonctions analytiques.

A côté des principes bien connus de cette théorie, on y trouve des renseignements précieux sur la plupart des résultats dont s'est enrichie cette branche de l'analyse depuis Cauchy et Weiertrass.

Ce premier fascicule. seul paru, contient l'introduction et le livre I. L'introduction est partagée en deux sections, La première traite des fonctions en général. Un aperçu de la théorie des ensembles, permet à M. Fouët de préciser le sens d'un certain nombre de locutions employées dans la théorie des fonctions. C'est dans la 2e section que l'auteur introduit la notion de fonction analytique, mais auparavant il définit avec précision les notions de limite, de continuité, de convergence.

Le livre I est consacré à l'étude des méthodes générales de définition et de représentation des fonctions. Les fonctions qu'on est amené à étudier peuvent être définies de bien des manières : par une équation, une série, une intégrale, etc. Dans tous les cas les mêmes questions se posent : la fonction ainsi définie est-elle analytique ? Quelles sont ses propriétés caractéristiques ?

Le chapitre I est consacré à la théorie classique des fonctions algébriques. La considération des surfaces de Riemann aide à rendre intutives les propositions établies. Parmi les exemples donnés dans ce chapitre on remarquera les transformations linéaires.

Nous passons ensuite aux fonctions définies par des séries et des produits infinis. Les propriétés générales des séries et en particulier celles des séries entières sont exposées avec détail. Un paragraphe spécial est consacré aux séries trigonométriques, mais l'auteur se borne à un historique, fort intéressant du reste. Nous pénétrons ensuite dans le domaine à peine exploré des séries divergentes. M. Fouët dit quelqnes mots des recherches de MM. Poincaré, Stieltjes, Padé et Le Roy (les lecteurs désireux d'approfondir ce sujet sont renvoyés aux sources), mais il s'arrête un peu plus longuement sur la théorie de M. Borel. Le chapitre se termine par l'étude de quelques séries classiques (fonction exponentielle, circulaires, fonction eulérienne, séries hypergéométriques).

Les fonctions définies par des séries multiples et des produits infinis multiples sont étudiées dans le chapitre III. Nous trouvons à la fin du chapitre l'étude des trois fonctions de Weierstrass et des fonctions thêta.

Dans le chapitre suivant, qui est consacré aux fonctions définies par des intégrales, il y a lieu de remarquer une généralisation de la notion d'intégrale due à Riemann et la démonstration du théorème fondamental de Cauchy donné par M. Goursat, démonstration qui n'exige pas d'hypothèse relative à la continuité de la dérivée. La série de Taylor déduite de la formule de Cauchy permet d'obtenir le développement des fonctions algébriques étudiées au chapitre Ier.

Le volume se termine par la théorie du prolongement analytique, d'après Weierstrass. Une question importante est traitée à la fin du dernier chapitre : celle du développement des fonctions en une série de polynômes. Il serait difficile d'énumérer tous les sujets traités ou seulement effleurés par M. Fouët.

Certainement son livre rendra de réels services ; il inspirera au lecteur la curiosité de lire les mémoires originaux. D. Mirimanoff (Genève).

MAURICE LÉVY. — **Éléments de Cinématique et de Mécanique**. Conformes au Programme d'admission de l'Ecole centrale des Arts et Manufactures. — 1 vol. XVIII-412 p. grand in-8°, prix : 10 francs. Bernard et Cie, Paris, 1902.

Le programme d'admission de l'École centrale des Arts et Manufactures, dont cette *Revue* a publié récemment les points principaux (n° de janvier 1903), accuse des tendances que l'on pourrait qualifier de réalistes.

Concrétiser les notions, faire appel, pour en préciser certaines, à d'autres ressortissant à un domaine différent, laisser de côté les subtilités au bénéfice de la clarté, employer moins de logique pure et plus d'images sensorielles, établir une correspondance sans lacune entre les faits objectifs et les propositions scientifiques, telle est la méthode.

Ses avantages nous paraissent incontestables tant au point de vue de la gymnastique intellectuelle qu'au point de vue utilitariste.

On conçoit ce que peut donner ce programme, lorsqu'il est appliqué par l'esprit lumineux et puissant, qui a présidé à son établissement.

M. Maurice Lévy s'y est strictement conformé. Ainsi qu'il nous en prévient dans l'Introduction, il a évité de donner la première place à de conventionnelles abstractions, et est allé au plus droit vers le réel.

Malgré le caractère élémentaire de l'ouvrage et l'extraordinaire simplicité des moyens employés, l'on sent que l'on est bien en présence d'une œuvre de maître, dont la lecture sera du plus grand profit, non seulement pour les candidats à l'Ecole centrale, auxquels elle est destinée, mais aussi pour tous ceux qui s'intéressent aux méthodes de présentation des principes de la Mécanique, tant au point de vue de l'enseignement qu'à celui de la satisfaction de la raison. G. COMBEBIAC (Limoges).

B. Riemann's Gesammelte Werke. Nachträge herausgegeben von M. NŒTHER und W. WIRTINGER. — Un vol. in-8°, 116 p. ; prix : Mk. 6 ; B.-G. Teubner, Leipzig, 1902.

Depuis l'apparition de la deuxième édition des *Œuvres de Riemann*, on a trouvé un certain nombre de documents qui montrent que, dans ses cours, le savant géomètre avait été beaucoup plus loin que dans ses publications. Ces documents ont été réunis dans le présent volume, qui paraît sous le titre de « Supplément aux œuvres complètes ». Ils comprennent : 1) des notes relatives aux leçons sur la théorie générale des intégrales algébriques (semestre d'hiver 1861-62), avec des annotations de M. NŒTHER ; 2) un extrait d'une leçon sur les intégrales d'une équation différentielle linéaire du second ordre en un point multiple (hiver 1856-57) ; 3) des notes relatives aux leçons sur la série hypergéométrique (semestre d'hiver 1858-59), avec des annotations de M. WIRTINGER ; 4) diverses notes mathématiques ; 5) diverses notes concernant Riemann.

M. SCHUSTER. — **Geometrische Aufgaben und Lehrbuch der Geometrie**. Planimetrie. Stereometrie. Ebene und sphärische Trigonometrie. Nach Konstruktiv-analytischer Methode bearbeitet. Ausgabe A (Für Vollanstalten) zweiter Teil : *Trigonometrie*. — Un vol. cartonné, 112 p. in-8° ; prix : Mk 1,60 ; B.-G. Teubner, Leipzig, 1903.,

Ce recueil d'*Exercices de Trigonométrie plane et sphérique* est appelé à jouer un rôle utile au moment où, dans l'enseignement secondaire, on tend de plus en plus à emprunter des problèmes aux diverses branches des mathématiques pures et appliquées. On y trouve en effet non seulement des exercices et problèmes purement théoriques, mais aussi des problèmes élémentaires concernant la Topographie, la Cosmographie, l'Astronomie, la Navigation, la Physique, etc. Grâce à la variété des exercices et au soin avec lequel ils ont été classés, ce petit ouvrage peut être recommandé à tous ceux qui enseignent la Trigonométrie.

H.-G. Zeuthen. — **Histoire des mathématiques dans l'antiquité et au moyen âge**, traduite en français par Jean Mascart. Un vol. in-8° de xv-296 pages. Prix : 9 francs. Paris, Gauthier-Villars, éditeur.

Cet ouvrage, comme l'écrit M. Zeuthen dans sa préface, a pour but « de mettre principalement en relief ce qu'il importe aux étudiants et aux professeurs de savoir ».

Pour de tels lecteurs, point n'est besoin d'entrer dans de grands détails historiques, il faut plutôt connaître les aspects primordiaux sous lesquels se manifestèrent aux chercheurs les vérités et les méthodes et quelles applications en découlèrent par la suite.

La notion précise de ces origines sera donc la condition indispensable pour comprendre la lente évolution des formes qui a fini par donner, au cours des âges, leur physionomie actuelle aux mathématiques.

Après avoir signalé brièvement les connaissances mathématiques des Egyptiens et des Babyloniens, l'auteur aborde la partie principale de son sujet, l'œuvre des mathématiciens grecs. Le savant danois voit, avec juste raison, « dans la découverte et le traitement ultérieur des grandeurs irrationnelles, et la force principale et la principale faiblesse des mathématiques grecques ». Les géomètres hellènes cherchèrent à rendre toute démonstration applicable, même à ces grandeurs qui ne se peuvent qu'approximativement exprimer par des nombres. Ainsi se développèrent leurs scrupuleuses tendances à l'impeccabilité des déductions et à la précision des termes. La mathématique devint alors la *science exacte* par excellence. Mais d'aussi grandioses conceptions n'auraient point dû entraîner l'indifférence pour les essais tendant à calculer approximativement ce qui ne comporte pas pleine et entière exactitude. Archimède (mort en 212 av. J.-C.), en indiquant les *limites* entre lesquelles doivent être situées les quantités cherchées, eut beau montrer qu'on pouvait exprimer d'une manière irréprochable les résultats mêmes d'un pareil calcul, son exemple ne fut pas suivi de ses compatriotes qui, pour la plupart, considérèrent comme secondaire le calcul pratique.

Le fondement de l'Arithmétique grecque n'eut ni la largeur, ni la fermeté scientifique de la base sur laquelle Euclide établit la Géométrie et, jusque vers l'an 300 après J.-C., on négligea presque complètement la science des nombres en Grèce et à Alexandrie. Alors vint Diophante qui apporta quelque innovation dans ce domaine. Entre les modes d'exposition antérieurs et les siens, existe une différence capitale. Il s'occupe seulement de problèmes numériques spéciaux et n'utilise pour les résoudre que des opérations purement numériques sans établir jamais de théorèmes généraux. Ayant renoncé à la représentation géométrique de ses prédécesseurs, il dut recourir à un moyen nouveau pour désigner à l'esprit une quantité inconnue de même que ses fonctions simples. Ce fut l'origine des *symboles algébriques*.

Au contraire des Grecs, les savants de l'Inde ne manifestèrent aucune aptitude pour la rigueur théorique et, pour eux, le calcul numérique et son empirisme pratique devinrent le véritable moyen de s'approprier les théorèmes et les méthodes. Au moyen âge, les Arabes développèrent puissamment l'héritage que les géomètres grecs et les arithméticiens hindous leur avaient transmis. En particulier, ils imprimèrent un vigoureux essor à la Trigonométrie et à ses applications astronomiques.

L'apparition du *Liber-Abaci* de Léonard de Pise (1202) signale le premier réveil des mathémathiques européennes que ses successeurs, l'italien Lucas Paciuoli, l'anglais Bradwardin, les français Oresme et Chuquet, les allemands Widmann, Peurbach et Regiomontanus firent honorablement progresser, en attendant que les Viète, les Napier, les Fermat, les Pascal, les Newton et les Leibniz inaugurent, par leurs géniales découvertes, l'ère de la science moderne.

Là s'arrête le livre de l'érudit professeur de Copenhague, et, comme conclusion, nous ne saurions formuler qu'un regret : c'est qu'il n'ait pas continué son histoire des mathématiques jusqu'à notre temps.

JACQUES BOYER (Paris).

SAMMLUNG GOESCHEN. Volumes p. in-12, cart., prix : 80 Pfg. le volume. G.-J. Goeschen, Leipzig.

Cette *Collection* comprend aujourd'hui plus de 150 monographies appartenant aux domaines les plus divers des connaissances humaines. Son but est de donner une introduction, à la fois simple et exacte, aux principales branches de la science. Elle s'adresse donc non seulement à ceux qui, déjà mêlés à la vie pratique, désirent compléter leurs connaissances générales dans quelques branches, mais aussi aux professeurs auxquels elle présente, sous une forme entièrement objective, un aperçu de l'état actuel des connaissances fondamentales de la plupart des branches de l'enseignement.

Les volumes qui se rattachent aux sciences mathématiques pures ou appliquées sont actuellement au nombre d'une vingtaine; ils sont dus à des hommes d'une compétence incontestable dans le domaine dont ils se sont chargé, et c'est à cela que doit être attribué le grand succès de la collection.

Les derniers volumes parus sont les suivants : *Projektive Geometrie* (2e édition), par K. DOEHLEMANN; c'est un exposé synthétique des éléments de géométrie moderne. — *Darstellende Geometrie*, par R. HAUSSNER; on y trouve la projection oblique et ses applications, et la projection orthogonale appliquée aux principaux problèmes relatifs à la droite, au plan et aux polyèdres. — *Höhere Analysis*, 2. Teil; *Integralrechnung* (2e édition); *Repetitorium und Aufgabensammlung zur Differentialrechnung*; (id) ... *zur Integralrechnung*, les trois volumes par Fr. JUNKER; les deux derniers constituent un excellent recueil d'exercices à utiliser dans un premier enseignement du Calcul différentiel et intégral.

H. F.