

III. Recherche approximative d'une racine positive d'un polynôme AVEC LE PREMIER TERME POSITIF ET LES AUTRES NÉGATIFS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

2. — Tout polynôme entier multiplié par

$$(x + \alpha)^2 + b^2$$

où

$$\alpha > |b|$$

et

$$\alpha \leq \left| \frac{a_\mu}{a_{\mu-1}} \right|$$

peut bien perdre, mais jamais gagner des variations.

La démonstration est analogue à la précédente ; il suffit d'ajouter ici l'observation que l'avant-dernier coefficient du produit

$$2\alpha a_\mu + (\alpha^2 + b^2) a_{\mu-1}$$

aura le même signe que le dernier, d'après nos conditions.

III. RECHERCHE APPROXIMATIVE D'UNE RACINE POSITIVE D'UN POLYNÔME AVEC LE PREMIER TERME POSITIF ET LES AUTRES NÉGATIFS

1. — On sait qu'une équation avec une seule variation a une racine positive α et qu'un polynôme multiplié par $x - \alpha$ acquiert au moins une nouvelle variation, il s'en suit que si nous divisons le premier membre de l'équation donnée par $x - \alpha$, nous aurons un polynôme avec des termes tous de même signe.

Soit maintenant un tel polynôme :

$$a_0 x^\mu - a_1 x^{\mu-1} - a_2 x^{\mu-2} - a_3 x^{\mu-3} \dots$$

si nous le divisons par $x - \alpha$, nous aurons tous les coefficients du quotient positifs

$$a_0, \quad a_0 \alpha - a_1 > 0, \quad a_0 \alpha^2 - a_1 \alpha - a_2 > 0,$$

De l'inégalité

$$a_0 \alpha - a_1 > 0$$

l'on déduit que

$$\alpha > \frac{a_1}{a_0},$$

de même de l'inégalité

$$a_0 \alpha^2 - a_1 \alpha - a_2 > 0$$

l'on déduit que

$$\alpha^2 - \frac{a_1}{a_0} \alpha - \frac{a_2}{a_0} > 0$$

mais, pour cela, il faut que α soit un nombre plus grand que la racine positive de l'équation

$$x^2 - \frac{a_1}{a_0} x - \frac{a_2}{a_0} = 0$$

(parce que $\alpha > 0$) d'où

$$\alpha > \frac{a_1}{2a_0} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 + \frac{a_2}{a_0}}$$

qui est plus grande que $\frac{a_1}{a_0}$.

IV. LIMITES DE RACINES

On connaît les relations entre les racines et les coefficients, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma + \dots &= -a_1 \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \dots &= +a_2 \\ \dots & \\ \alpha\beta\gamma \dots \gamma &= (-1)^\mu a_\mu \end{aligned}$$

Nous pouvons en déduire des règles pour trouver des limites des racines ; par exemple :

1. — Si dans un polynôme du degré μ avec des racines toutes réelles, nous avons

$$|a_{\mu-1}| > a_\mu$$

il y aura nécessairement une racine en valeur absolue moindre que μ .

Démonstration. — La somme des produits des racines $\mu - 1$ à $\mu - 1$ donne en valeur absolue le terme $|a_{\mu-1}|$. La valeur absolue du produit des racines est $|a_\mu|$. Des produits $\mu - 1$ à $\mu - 1$, le plus grand en valeur absolue est celui qui n'a pas la racine la plus petite ; et si nous multiplions ce produit par μ , nous aurons un nombre plus grand que $|a_{\mu-1}|$ et par conséquent que $|a_\mu|$; tandis que si le même produit est multiplié par la racine la plus petite, nous aurons le terme $|a_\mu|$.