III. Recherche approximative d'une racine positive d'un polynôme AVEC LE PREMIER TERME POSITIF ET LES AUTRES NÉGATIFS

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

2. — Tout polynôme entier multiplié par

$$(x+\alpha)^2+b^2$$

où

$$\alpha > | b |$$

et

$$\alpha \leqq \left| \frac{a_\mu}{a_{\mu-1}} \right|$$

peut bien perdre, mais jamais gagner des variations.

La démonstration est analogue à la précédente ; il suffit d'ajouter ici l'observation que l'avant-dernier coefficient du produit

$$2\alpha\, a_\mu + (\alpha^2+b^2)\, a_{\mu-1}$$

aura le même signe que le dernier, d'après nos conditions.

III. Recherche approximative d'une racine positive d'un polynôme avec le premier terme positif et les autres négatifs

1. — On sait qu'une équation avec une seule variation a une racine positive α et qu'un polynôme multiplié par $x-\alpha$ acquiert au moins une nouvelle variation, il s'en suit que si nous divisons le premier membre de l'équation donnée par $x-\alpha$, nous aurons un polynôme avec des termes tous de même signe.

Soit maintenant un tel polynôme :

$$a_0 x^\mu - a_1 x^{\mu-1} - a_2 x^{\mu-2} - a_3 x^{\mu-3} \ldots\ldots$$

si nous le divisons par $x-a$, nous aurons tous les coefficients du quotient positifs

$$a_0, \quad a_0\alpha - a_1 > 0, \quad a_0\alpha^2 - a_1\alpha - a_2 > 0,$$

De l'inégalité

$$a_0\alpha - a_1 > 0$$

l'on déduit que

$$\alpha > \frac{a_1}{a_0},$$

de même de l'inégalité

$$a_0\alpha^2 - a_1\alpha - a_2 > 0$$

l'on déduit que

$$\alpha^2 - \frac{a_1}{a_0}\alpha - \frac{a_2}{a_0} > 0$$

mais, pour cela, il faut que α soit un nombre plus grand que la racine positive de l'équation

$$x^2 - \frac{a_1}{a_0}.\, x - \frac{a_2}{a_0} = 0$$

(parce que $\alpha > 0$) d'où

$$\alpha > \frac{a_1}{2a_0} + \sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2 + \frac{a_2}{a_0}}$$

qui est plus grande que $\frac{a_1}{a_0}$.

IV. Limites de racines

On connaît les relations entre les racines et les coefficients, c'est-à-dire

$$\begin{gathered}\alpha + \beta + \gamma + \ldots\ldots = -a_1 \\ \alpha\beta + \alpha\gamma + \ldots\ldots = +a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha\beta\gamma\ldots\ldots\gamma = (-1)^\mu a_\mu\end{gathered}$$

Nous pouvons en déduire des règles pour trouver des limites des racines ; par exemple :

1. — Si dans un polynôme du degré μ avec des racines toutes réelles, nous avons

$$| a_{\mu-1} | > a_\mu$$

il y aura nécessairement une racine en valeur absolue moindre que μ.

Démonstration. — La somme des produits des racines $\mu - 1$ à $\mu - 1$ donne en valeur absolue le terme $| a_{\mu-1} |$. La valeur absolue du produit des racines est $| a_\mu |$. Des produits $\mu - 1$ à $\mu - 1$, le plus grand en valeur absolue est celui qui n'a pas la racine la plus petite ; et si nous multiplions ce produit par μ, nous aurons un nombre plus grand que $| a_{\mu-1} |$ et par conséquent que $| a_\mu |$; tandis que si le même produit est multiplié par la racine a plus petite, nous aurons le terme $| a_\mu |$.