II. Changement des variations d'un polynôme en multipliant par ${(x+a)}^2+b^2$.

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

II. Changement des variations d'un polynôme en multipliant par $(x+a)^2+b^2$.

Considérons l'opération :

$$
\begin{array}{l}
a_0x_\mu + a_1x^{\mu-1} + a_2x^{\mu-2} + \ldots + a_{\mu-2}x^2 + a_{\mu-1}x + a_\mu \text{ (polynôme complet).}\\
x^2 + 2\alpha x + (\alpha^2+b^2)\\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l|l|l|l}
a_0 & x^{\mu+2} + a_1 & x^{\mu+1} + a_2 & x^\mu + a_3 & x^{\mu-1} \ldots + a_{\mu-2}\\
 & \quad + 2\alpha a_0 & \quad + 2\alpha a_1 & \quad + 2\alpha a_2 & \quad + 2\alpha a_{\mu-3}\\
 & & \quad + (\alpha^2+b^2)\alpha_0 & \quad + (\alpha^2+b^2)a_1 & \quad + (\alpha^2+b^2)a_{\mu-4}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l|l|l|l}
x^4 + a_{\mu-1} & x^3 + a_\mu & x^2 & x\\
\quad + 2\alpha a_{\mu-2} & \quad + 2\alpha a_{\mu-1} & \quad + 2\alpha a_\mu & \\
\quad + (\alpha^2+b^2)a_{\mu-3} & \quad + (\alpha^2+b^2)a_{\mu-2} & \quad + (\alpha^2+b^2)a_{\mu-1} & \quad + (\alpha^2+b^2)a_\mu.
\end{array}
$$

1. — Soit $\alpha > | b |$ et $a_\mu . a_{\mu-1} > 0$ alors le nouveau polynôme présentera un nombre de variations moindre ou, au plus, égal à celui du polynôme donné.

Démonstration. — Exprimons par

$a_0, a_1 \ldots, a_\rho$ le premier groupe des termes positifs.
$a_{\rho+1}, a_{\rho+2} \ldots, a_\tau$ le deuxième groupe des termes négatifs.
$a_{\tau+1}, a_{\tau+2} \ldots, a_\sigma$ le troisième groupe des termes positifs.
e. c. t.

Nous observons que, aux $\rho + 1$ premiers termes positifs du multiplicande correspondent $\rho + 1$ premiers termes positifs du produit.

Du a_ρ jusqu'à a_τ il se présente une variation au multiplicande; je dis qu'il se présentera une, au plus, dans les termes correspondants du produit; parce que dans la série

$$
a_{\rho+1} + 2\alpha a_\rho + (\alpha^2+b^2)\, a_{\rho-1},\ a_{\rho+2} + 2\alpha . a_{\rho+1} + (\alpha^2+b^2)\, a_\rho,\\
a_{\rho+3} + 2\alpha a_{\rho+2} + (\alpha^2+b^2)\, a_{\rho+1}, \ldots,\ a_\tau + 2\alpha . a_{\tau-1} + (\alpha^2+b^2)\, a_{\tau-2}
$$

tous les termes à partir du troisième, jusqu'au dernier sont négatifs parce qu'ils se composent de termes négatifs. Les coefficients qui se composent de négatifs et positifs sont le premier et le second coefficient de la série précédente.

Or, quand le premier est négatif, nous avons

$$| a_{\rho+1} | > 2.\alpha.a_\rho$$

d'où aussi

$$2 . \alpha . \mid a_{\rho+1} \mid > (\alpha^2 + b^2)\, a_\rho,$$

parce que

$$\alpha > \mid b \mid ;$$

par conséquent

$$\mid a_{\rho+2} + 2\alpha a_{\rho+1} \mid > (\alpha^2 + b^2) . a_\rho,$$

c'est-à-dire que le second est aussi négatif; quand, au contraire, le premier est positif, alors quel que soit le second nous aurons une variation. Nous voyons de même que, comme les termes du multiplicande a_τ, $a_{\tau+1} \ldots\ldots a_\sigma$ présentent une variation, les termes correspondants du produit présentent aussi, au plus, une variation, etc. L'on déduit ainsi la règle suivante : Du premier terme du produit jusqu'à celui qui précède l'avant-dernier, nous avons, au plus, autant de variations que le multiplicande.

Il reste encore à examiner dans le produit les trois derniers termes, c'est-à-dire

$$a_\mu + 2\alpha a_{\mu-1} + (\alpha^2 + b^2)\, a_{\mu-2},\ 2\alpha a_\mu + (\alpha^2 + b^2) \alpha_{\mu-1},\ (\alpha^2 + b^2)\, a_\mu.$$

D'après ce que nous avons démontré, le produit présente, jusqu'au terme dont le rang est $\mu + 1$ autant de variations que le multiplicande, ou moins. Or, si d'abord il en présente autant que le multiplicande, le terme qui a le rang $\mu + 1$ aura le même signe avec celui qui a le rang $\mu + 1$ du multiplicande, autrement le produit présentera, jusque-là, au moins une variation de moins, parce qu'il ne peut en présenter davantage, c'est-à-dire le coefficient $a_\mu + 2\alpha . a_{\mu-1} + (\alpha + b^2)\, a_{\mu-2}$ aura le même signe avec a_μ par conséquent aussi avec $(\alpha^2 + b^2)\, a_\mu$ et aussi avec $2\alpha\, a_\mu + (\alpha^2 + b^2)\, a_{\mu-1}$ car, nous avons supposé que

$$a_\mu\, a_{\mu-1} > 0.$$

donc les trois derniers termes du produit ne présentent aucune variation; si maintenant le produit présente jusqu'au terme qui a le rang $(\mu + 1)$ moins de variations que le multiplicande, alors les variations du produit seront, au plus, aussi nombreuses que celles du multiplicande, car les trois derniers coefficients du produit peuvent présenter, au plus, une variation, puisque

$$a_{\mu-1}\, a_\mu > 0.$$

2. — Tout polynôme entier multiplié par

$$(x+\alpha)^2+b^2$$

où

$$\alpha > |b|$$

et

$$\alpha \leqq \left| \frac{a_\mu}{a_{\mu-1}} \right|$$

peut bien perdre, mais jamais gagner des variations.

La démonstration est analogue à la précédente ; il suffit d'ajouter ici l'observation que l'avant-dernier coefficient du produit

$$2\alpha\, a_\mu + (\alpha^2+b^2)\, a_{\mu-1}$$

aura le même signe que le dernier, d'après nos conditions.

III. Recherche approximative d'une racine positive d'un polynôme avec le premier terme positif et les autres négatifs

1. — On sait qu'une équation avec une seule variation a une racine positive α et qu'un polynôme multiplié par $x-\alpha$ acquiert au moins une nouvelle variation, il s'en suit que si nous divisons le premier membre de l'équation donnée par $x-\alpha$, nous aurons un polynôme avec des termes tous de même signe.

Soit maintenant un tel polynôme :

$$a_0 x^\mu - a_1 x^{\mu-1} - a_2 x^{\mu-2} - a_3 x^{\mu-3} \ldots\ldots$$

si nous le divisons par $x-a$, nous aurons tous les coefficients du quotient positifs

$$a_0, \quad a_0\alpha - a_1 > 0, \quad a_0\alpha^2 - a_1\alpha - a_2 > 0,$$

De l'inégalité

$$a_0\alpha - a_1 > 0$$

l'on déduit que

$$\alpha > \frac{a_1}{a_0},$$

de même de l'inégalité

$$a_0\alpha^2 - a_1\alpha - a_2 > 0$$