

II. Changement des variations d'un polynôme en multipliant par $\{(x+a)\}^2+b^2$.

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **5 (1903)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

II. CHANGEMENT DES VARIATIONS D'UN POLYNÔME EN MULTIPLIANT
PAR $(x + a)^2 + b^2$.

Considérons l'opération :

$$a_0x^\mu + a_1x^{\mu-1} + a_2x^{\mu-2} + \dots + a_{\mu-2}x^2 + a_{\mu-1}x + a_\mu \text{ (polynôme complet).}$$

$$x^2 + 2ax + (a^2 + b^2)$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} a_0 & x^\mu + a_1 & x^{\mu+1} + a_2 & x^\mu + a_3 & x^{\mu-1} \dots + a_{\mu-2} & & & \\ & + 2xa_0 & + 2xa_1 & + 2xa_2 & + 2xa_{\mu-3} & & & \\ \hline & & + (a^2 + b^2)a_0 & + (a^2 + b^2)a_1 & + (a^2 + b^2)a_{\mu-4} & & & \\ & x^4 + a_{\mu-1} & x^3 + a_\mu & x^2 & x & & & \\ & + 2xa_{\mu-2} & + 2xa_{\mu-1} & + 2xa_\mu & & & & \\ & + (a^2 + b^2)a_{\mu-3} & + (a^2 + b^2)a_{\mu-2} & + (a^2 + b^2)a_{\mu-1} & + (a^2 + b^2)a_\mu & & & \end{array}$$

1. — Soit $\alpha > |b|$ et $a_\mu \cdot a_{\mu-1} > 0$ alors le nouveau polynôme présentera un nombre de variations moindre ou, au plus, égal à celui du polynôme donné.

Démonstration. — Exprimons par

- a_0, a_1, \dots, a_ρ le premier groupe des termes positifs.
 - $a_{\rho+1}, a_{\rho+2}, \dots, a_\tau$ le deuxième groupe des termes négatifs.
 - $a_{\tau+1}, a_{\tau+2}, \dots, a_\sigma$ le troisième groupe des termes positifs.
- c. c. t.

Nous observons que, aux $\rho + 1$ premiers termes positifs du multiplicande correspondent $\rho + 1$ premiers termes positifs du produit.

Du a_ρ jusqu'à a_τ il se présente une variation au multiplicande ; je dis qu'il se présentera une, au plus, dans les termes correspondants du produit ; parce que dans la série

$$a_{\rho+1} + 2xa_\rho + (a^2 + b^2)a_{\rho-1}, a_{\rho+2} + 2x.a_{\rho+1} + (a^2 + b^2)a_\rho,$$

$$a_{\rho+3} + 2xa_{\rho+2} + (a^2 + b^2)a_{\rho+1}, \dots, a_\tau + 2x.a_{\tau-1} + (a^2 + b^2)a_{\tau-2}$$

tous les termes à partir du troisième, jusqu'au dernier sont négatifs parce qu'ils se composent de termes négatifs. Les coefficients qui se composent de négatifs et positifs sont le premier et le second coefficient de la série précédente.

Or, quand le premier est négatif, nous avons

$$|a_{\rho+1}| > 2 \cdot \alpha \cdot a_\rho$$

d'où aussi

$$2. x. | a_{\sigma+1} | > (x^2 + b^2) a_{\sigma},$$

parce que

$$x > | b | ;$$

par conséquent

$$| a_{\sigma+2} + 2xa_{\sigma+1} | > (x^2 + b^2) a_{\sigma},$$

c'est-à-dire que le second est aussi négatif; quand, au contraire, le premier est positif, alors quel que soit le second nous aurons une variation. Nous voyons de même que, comme les termes du multiplicande $a_{\tau}, a_{\tau+1}, \dots, a_{\sigma}$ présentent une variation, les termes correspondants du produit présentent aussi, au plus, une variation, etc. L'on déduit ainsi la règle suivante: Du premier terme du produit jusqu'à celui qui précède l'avant-dernier, nous avons, au plus, autant de variations que le multiplicande.

Il reste encore à examiner dans le produit les trois derniers termes, c'est-à-dire

$$a_{\mu} + 2xa_{\mu-1} + (x^2 + b^2) a_{\mu-2}, \quad 2xa_{\mu} + (x^2 + b^2) a_{\mu-1}, \quad (x^2 + b^2) a_{\mu}.$$

D'après ce que nous avons démontré, le produit présente, jusqu'au terme dont le rang est $\mu + 1$ autant de variations que le multiplicande, ou moins. Or, si d'abord il en présente autant que le multiplicande, le terme qui a le rang $\mu + 1$ aura le même signe avec celui qui a le rang $\mu + 1$ du multiplicande, autrement le produit présentera, jusque-là, au moins une variation de moins, parce qu'il ne peut en présenter davantage, c'est-à-dire le coefficient $a_{\mu} + 2x.a_{\mu-1} + (x + b^2) a_{\mu-2}$ aura le même signe avec a_{μ} par conséquent aussi avec $(x^2 + b^2) a_{\mu}$ et aussi avec $2x a_{\mu} + (x^2 + b^2) a_{\mu-1}$ car, nous avons supposé que

$$a_{\mu} a_{\mu-1} > 0.$$

donc les trois derniers termes du produit ne présentent aucune variation; si maintenant le produit présente jusqu'au terme qui a le rang $(\mu + 1)$ moins de variations que le multiplicande, alors les variations du produit seront, au plus, aussi nombreuses que celles du multiplicande, car les trois derniers coefficients du produit peuvent présenter, au plus, une variation, puisque

$$a_{\mu-1} a_{\mu} > 0.$$

2. — Tout polynôme entier multiplié par

$$(x + \alpha)^2 + b^2$$

où

$$\alpha > |b|$$

et

$$\alpha \leq \left| \frac{a_\mu}{a_{\mu-1}} \right|$$

peut bien perdre, mais jamais gagner des variations.

La démonstration est analogue à la précédente ; il suffit d'ajouter ici l'observation que l'avant-dernier coefficient du produit

$$2\alpha a_\mu + (\alpha^2 + b^2) a_{\mu-1}$$

aura le même signe que le dernier, d'après nos conditions.

III. RECHERCHE APPROXIMATIVE D'UNE RACINE POSITIVE D'UN POLYNÔME AVEC LE PREMIER TERME POSITIF ET LES AUTRES NÉGATIFS

1. — On sait qu'une équation avec une seule variation a une racine positive α et qu'un polynôme multiplié par $x - \alpha$ acquiert au moins une nouvelle variation, il s'en suit que si nous divisons le premier membre de l'équation donnée par $x - \alpha$, nous aurons un polynôme avec des termes tous de même signe.

Soit maintenant un tel polynôme :

$$a_0 x^\mu - a_1 x^{\mu-1} - a_2 x^{\mu-2} - a_3 x^{\mu-3} \dots$$

si nous le divisons par $x - \alpha$, nous aurons tous les coefficients du quotient positifs

$$a_0, \quad a_0 \alpha - a_1 > 0, \quad a_0 \alpha^2 - a_1 \alpha - a_2 > 0,$$

De l'inégalité

$$a_0 \alpha - a_1 > 0$$

l'on déduit que

$$\alpha > \frac{a_1}{a_0},$$

de même de l'inégalité

$$a_0 \alpha^2 - a_1 \alpha - a_2 > 0$$