

# SUR LA LIGNE DROITE REGARDÉE COMME ÉTANT LE PLUS COURT CHEMIN D'UN POINT A UN AUTRE (1)

Autor(en): **Hilbert, D.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1901)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-4647>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

intérêt seraient étudiées volontiers et deviendraient bientôt classiques. Après avoir donné aux maîtres la liberté qu'ils peuvent attendre d'elle, car les traditions et les préjugés, la mode encore, sont ici les vrais tyrans, l'Administration ne pourrait-elle enfin récompenser ceux d'entre eux qui auraient su en user au profit des études? C'est à ses élèves surtout que rend service un maître habile à les faire briller aux examens, mais c'est à l'Etat, quand il a fait faire quelque réel progrès à l'enseignement.

Il en sera ce qu'il pourra, mais j'ai cru remplir un devoir de ma modeste charge, en dénonçant ici l'édifice inhospitalier et déplaisant des Mathématiques classiques, au public comme à tout Ministre qui serait particulièrement désireux d'élever partout le niveau de cet enseignement, et d'en rendre les parties les plus indispensables, pour la première fois vraiment populaires.

CH. MÉRAY (Dijon).

---

## SUR LA LIGNE DROITE

REGARDÉE COMME ÉTANT LE PLUS COURT CHEMIN  
D'UN POINT A UN AUTRE <sup>(1)</sup>

*Extrait d'une lettre adressée à M. F. Klein par M. D. Hilbert.*

Si nous prenons comme éléments les points, les droites et les plans, nous pourrions établir la Géométrie au moyen des axiomes suivants <sup>(2)</sup> :

---

<sup>(1)</sup> Comparer le problème 4 « de la droite regardée comme le plus court chemin d'un point à un autre » dans la conférence faite par M. Hilbert au Congrès international des Mathématiciens en 1900, publié dans les *Göttinger Nachrichten* (1900). Une traduction française sera publiée dans le volume du Congrès. Ce problème 4 soulève un grand nombre de questions ayant trait aux principes fondamentaux de la géométrie. Aussi une traduction de l'article actuel, dont la connaissance est nécessaire à cette étude, ne nous semble pas inutile.

<sup>(2)</sup> Comparer la Festschrift de M. Hilbert, *Grundlagen der Geometrie*, Teubner, et Gauthier-Villars, traduction L. Laugel (1900).

1. *Les axiomes relatifs à l'association de ces éléments ;* sous forme abrégée ils peuvent s'exprimer comme il suit :

Deux points quelconques A et B déterminent toujours une droite  $a$ .

Trois points quelconques A, B, C non en ligne droite déterminent un plan  $\alpha$ . Lorsque deux points A et B d'une droite  $a$  sont situés dans un plan  $\alpha$ , la droite  $a$  est également située tout entière dans ce plan.

Sur toute droite il y a au moins deux points; sur tout plan il y a au moins trois points non en ligne droite, et dans l'espace il y a au moins quatre points non situés dans le même plan.

2. *Les axiomes au moyen desquels on introduit la conception de segment ainsi que celle de distribution des points d'une droite :* ces axiomes ont été exposés et discutés systématiquement pour la première fois par M. Pasch <sup>(1)</sup>; ce sont essentiellement les suivants :

Entre deux points A, B d'une droite, il y a toujours au moins un troisième point C de la droite. De trois points d'une droite, il en est toujours un et un seul, qui est situé entre les deux autres.

Lorsque A et B sont situés sur une droite  $a$ , il y a toujours un point C de cette droite  $a$ , tel que B soit situé entre A et C. Quatre points  $A_1, A_2, A_3, A_4$  d'une droite  $a$  peuvent toujours être distribués d'une manière telle que  $A_i$  soit en général situé entre  $A_h$  et  $A_k$  pourvu que l'indice  $h$  soit plus petit et l'indice  $k$  plus grand que  $i$ , ou vice versa, c'est-à-dire pourvu que l'indice  $k$  soit plus petit et l'indice  $h$  plus grand que  $i$ . Toute droite  $a$ , située dans un plan  $\alpha$ , partage les points de ce plan  $\alpha$  en deux régions ayant la propriété suivante : tout point A de l'une des régions détermine avec tout point A' de l'autre région un segment AA' sur lequel est situé un point de la droite  $a$ ; au contraire deux points quelconques A et B de la même région déterminent un segment AB sur lequel n'est situé aucun point de la droite  $a$ .

3. *L'axiome de la continuité* que j'exprimerai sous la forme suivante :

<sup>(1)</sup> *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Teubner, 1882.

$A_1, A_2, A_3, \dots$  étant une série infinie de points d'une droite  $a$  et  $B$  étant un autre point de  $a$ , tel qu'en général  $A_i$  soit situé entre  $A_h$  et  $B$ , pourvu que l'indice  $h$  soit plus petit que  $i$ , il existe toujours un point  $C$  qui a la propriété suivante : tous les points de la série infinie  $A_2, A_3, A_4, \dots$  sont situés entre  $A_1$  et  $C$ , et tout autre point  $C'$  pour lequel ceci aurait également lieu est situé entre  $C$  et  $B$ .

Ces axiomes permettent d'édifier d'une manière absolument rigoureuse la théorie de la division harmonique, et si nous raisonnons comme le fait M. Lindemann <sup>(1)</sup>, nous obtenons le théorème suivant :

A tout point l'on peut faire correspondre trois nombres réels  $x, y, z$ , et à tout plan une relation linéaire entre ces trois nombres  $x, y, z$ , telle que tous les points pour lesquels les trois nombres  $x, y, z$ , vérifient la relation linéaire, soient situés dans le plan susdit, et inversement telle que tous les points du plan correspondent à des nombres  $x, y, z$ , qui vérifient la relation linéaire. Enfin, si l'on regarde  $x, y, z$  comme étant les coordonnées rectangulaires d'un point dans l'espace euclidien ordinaire, aux points de l'espace primitif correspondent des points à l'intérieur d'un certain corps nulle part concave de l'espace euclidien, et réciproquement à tous les points à l'intérieur de ce corps nulle part concave de l'espace euclidien correspondent des points de notre espace primitif : *notre espace primitif a donc pour représentation l'intérieur d'un corps nulle part concave de l'espace euclidien.*

Par corps nulle part concave nous devons entendre un corps tel que si l'on joint par une droite deux points situés à l'intérieur du corps, la partie de la droite située entre les deux points sera tout entière à l'intérieur du corps. Ici je prends la liberté de vous faire remarquer que ce corps concave dont il s'agit ici joue un rôle important dans les recherches arithmétiques de M. Minkowski <sup>(2)</sup> qui en a donné une définition analytique simple.

Inversement lorsque dans l'espace euclidien l'on donne un

<sup>(1)</sup> *Vorlesungen über Geometrie*, t. II, partie 1<sup>re</sup>, p. 433 et suiv., Teubner, 1891.

<sup>(2)</sup> *Comparer Geometrie d, Zahlen*, Teubner, 1895.

corps quelconque nulle part concave, ce corps définit une géométrie déterminée où les axiomes précités sont tous vérifiés : à chaque point à l'intérieur du corps nulle part concave correspond un point de cette géométrie ; à chaque droite, à chaque plan de l'espace euclidien, qui passent à l'intérieur du corps, correspondent respectivement une droite, un plan, de la géométrie générale ; mais aux points de l'espace euclidien sur la surface qui limite le corps nulle part concave et aux points à l'extérieur de ce corps ne correspondent pas d'éléments de la géométrie générale ; et il en est de même pour les droites et les plans de l'espace euclidien, qui passent en dehors du corps. Le théorème qui précédait, relatif à la représentation des points de la géométrie générale à l'intérieur d'un corps nulle part concave de la géométrie euclidienne exprime donc une propriété des éléments de la géométrie générale qui équivaut absolument aux axiomes énoncés au début de cette lettre.

Nous allons maintenant définir le concept de longueur d'un segment AB dans notre géométrie générale ; à cet effet désignons les deux points de l'espace euclidien qui correspondent aux deux points A et B de l'espace primitif, par les mêmes lettres A et B ; prolongeons alors la droite AB de l'espace euclidien de part et d'autre au delà de A et de B jusqu'à ce qu'elle rencontre la surface qui limite le corps nulle part concave en X et en Y ; nous désignerons en général la distance euclidienne de deux points P et Q de l'espace euclidien par  $\overline{PQ}$  ; nous dirons alors que la valeur réelle de

$$\widehat{AB} = l \left[ \frac{\overline{YA}}{\overline{YB}} \cdot \frac{\overline{XB}}{\overline{XA}} \right]$$

est la *longueur* du segment AB dans notre géométrie générale.

Comme

$$\frac{\overline{YA}}{\overline{YB}} > 1, \quad \frac{\overline{XB}}{\overline{XA}} > 1,$$

cette longueur est toujours une quantité positive.

Il serait facile d'énumérer les propriétés de la conception de longueur qui conduisent nécessairement à une expression de la nature indiquée pour  $\widehat{AB}$  ; je laisse ceci de côté pour ne pas dans cette lettre fatiguer par trop votre attention.

L'expression précitée pour  $\widehat{AB}$  montre également comment cette quantité dépend de la forme du corps nulle part concave. En effet, laissons fixés à l'intérieur du corps les points A et B et faisons varier seulement la surface qui limite le corps en sorte que le point limite X se rapproche de A et le point Y de B ; il est alors évident que chacun des deux quotients

$$\frac{\overline{YA}}{\overline{YB}}, \frac{\overline{XB}}{\overline{XA}}$$

augmente, et qu'il en est par suite de même de la valeur de  $\widehat{AB}$ .

A l'intérieur du corps nulle part concave considérons un triangle donné ABC. Le plan  $\alpha$  de ce triangle coupera le corps suivant un ovale nulle part concave. Prolongeons les trois côtés AB, AC,

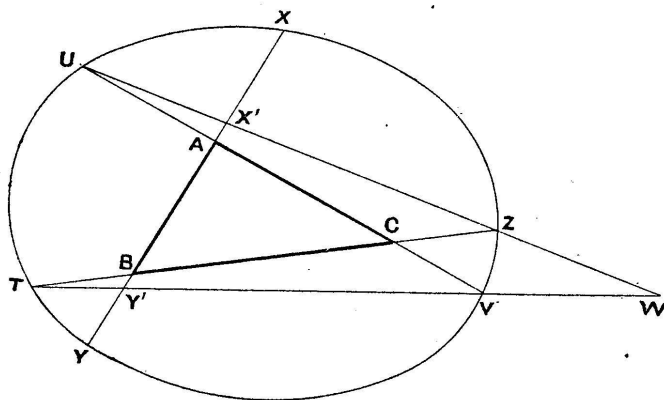


Fig. 1.

BC du triangle jusqu'à ce qu'ils rencontrent le contour de l'ovale en les points respectifs X et Y, U et V, T et Z. Tirons ensuite les droites UZ et TV et prolongeons-les jusqu'en leur intersection en W. Désignons d'autre part leurs intersections respectives avec la droite XY par X' et Y'. Maintenant au lieu de prendre comme base de nos considérations l'ovale primitive nulle part concave découpée par le plan  $\alpha$ , prenons le triangle UWT ; l'on voit aisément que dans la géométrie plane déterminée par ce triangle, les longueurs  $\widehat{AC}$  et  $\widehat{BC}$  sont les mêmes que dans la géométrie primitive, tandis que la longueur du côté AB a été augmentée par le changement opéré.

Pour distinguer la nouvelle longueur du côté AB de la précédente longueur  $\widehat{AB}$  désignons-la par  $\widehat{\widehat{AB}}$  ; l'on aura alors  $\widehat{\widehat{AB}} > \widehat{AB}$ .

Je dis que nous avons alors pour les longueurs des côtés du triangle ABC la relation simple qui suit :

$$\widehat{AB} = \widehat{AC} + \widehat{BC}.$$

Pour le démontrer joignons W à C et prolongeons la droite WC jusqu'à son intersection avec AB en D.

Si l'on considère les deux ponctuelles X', A, D, Y et U, A, C, V, la théorie bien connue du rapport anharmonique nous donne l'égalité

$$\frac{\overline{Y'A}}{\overline{Y'D}} \frac{\overline{X'D}}{\overline{X'A}} = \frac{\overline{VA}}{\overline{VC}} \frac{\overline{UC}}{\overline{UA}}$$

et l'on a encore de même en considérant les deux ponctuelles Y', B, D, X et T, B, C, Z l'égalité

$$\frac{\overline{X'B}}{\overline{X'D}} \frac{\overline{Y'B}}{\overline{Y'D}} = \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZC}} \frac{\overline{TC}}{\overline{TB}}$$

Multipliant entre elles les deux précédentes égalités, il vient

$$\frac{\overline{Y'A}}{\overline{Y'B}} \frac{\overline{X'B}}{\overline{X'A}} = \frac{\overline{VA}}{\overline{VC}} \frac{\overline{UC}}{\overline{UA}} \cdot \frac{\overline{ZB}}{\overline{ZC}} \frac{\overline{TC}}{\overline{TB}},$$

équation qui démontre ce que j'affirmais.

Ce qui précède vous montre qu'en invoquant uniquement les axiomes énoncés au commencement de ma lettre on a le théorème général suivant :

*Dans tout triangle la somme de deux côtés est plus grande que le troisième côté ou lui est égale.*

Il est en même temps évident que le cas d'égalité se présente seulement quand le plan  $\alpha$  détermine par son intersection avec le corps nulle part concave deux segments *rectilignes* UZ et TV. Cette dernière condition peut aussi être énoncée sans avoir recours au corps nulle part concave. Soient données, en effet, deux droites  $a$ ,  $b$  de la géométrie primitive, situées dans un plan  $\alpha$  et se coupant en un point C; en général, en chacun des quatre angles formés autour de C par les deux droites  $a$ ,  $b$  du plan  $\alpha$  il existera des droites qui ne couperont aucune des deux droites  $a$  et  $b$ ; mais en particulier si dans deux de ces angles qui soient opposés par le

sommet il ne se trouve aucune ligne droite de ce genre, la condition en question sera vérifiée et en ce cas il *existera toujours des triangles où la somme de deux côtés est égale au troisième*. Par conséquent, dans le cas que nous considérons, entre certains points A et B existe un chemin formé de deux portions rectilignes dont la longueur totale est égale à la distance directe entre les deux points A et B. L'on peut sans aucune difficulté démontrer *que tous les chemins d'un point à un autre qui jouissent de cette propriété peuvent être construits de la manière qui vient d'être indiquée, et que tous les autres chemins ont une longueur totale plus grande*.

Il serait très facile d'étudier d'une manière plus approfondie cette question du chemin le plus court et cela présenterait un intérêt tout particulier dans le cas où le corps nulle part concave serait un tétraèdre.

Pour terminer, je prends la liberté de vous faire remarquer que dans les développements qui précèdent le corps nulle part concave est supposé partout à distance finie. Lorsque dans la géométrie définie par les axiomes précités il existe une droite et un point tels que par ce point l'on ne puisse mener qu'une seule parallèle à cette droite la précédente supposition n'est pas admissible. Vous reconnaîtrez facilement quelles sont les modifications qu'il faut alors apporter à mon exposition.

Agréez, etc...

D. HILBERT (traduit par L. LAUGEL.)

14 août 1894.

---