Zeitschrift: L'Enseignement Mathématique

Herausgeber: Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique

Band: 3 (1901)

Heft: 1: L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

Rubrik: BIBLIOGRAPHIE

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

BIBLIOGRAPHIE

Éléments d'Économie politique pure, ou *Théorie de la richesse sociale*, par Léon Walras, 4e édition, Lausanne 1900.

Dans ce volume de près de 500 pages, M. Walras a réuni en un véritable corps de doctrine, en les complétant sur quelques points de détail, les remarquables travaux qu'il a commencé à publier en 1874 et poursuivis depuis avec une infatigable persévérance, en vue d'appliquer les méthodes mathématiques à cette partie de la science économique à laquelle il est légitime de le faire, c'est-à-dire aux théories de l'échange, de l'établissement des prix, de la circulation et de la monnaie, etc. En effet, si l'Economie politique, telle qu'on l'enseigne un peu partout, embrasse un bon nombre de questions dont la solution relève presque uniquement de considérations de morale ou d'équité (par exemple les règles à suivre pour l'appropriation des richesses naturelles, pour la répartition des richesses produites entre les individus et la collectivité, etc.), et d'autres d'ordre purement technique ou relevant de considérations d'utilité sociale (par exemple les conditions de meilleure utilisation des fonds productifs, la division du travail, etc.), elle s'occupe aussi de certains faits sociaux qui ne résultent pas de la volonté arbitraire de l'homme, bien qu'ils soient en relation avec sa nature propre et avec les conditions spéciales du milieu où il est obligé de vivre et de puiser ce qui est nécessaire à la satisfaction de ses besoins : tel est le fait primordial de l'existence d'une *valeur d'échange* pour toutes les choses à la fois utiles et rares, c'est-à-dire à la fois susceptibles de satisfaire (directement ou indirectement) un ou plusieurs besoins et limitées en quantité. Les valeurs d'échange étant des grandeurs comparables entre elles et variables suivant des lois qu'il est très intéressant de connaître, rien ne s'oppose à ce que l'étude de ces grandeurs, comme de toutes celles que remplissent les mêmes conditions, soit abordée par des méthodes mathématiques. Il faut seulement prendre garde de n'introduire à la base de cette étude que des définitions parfaitement nettes et précises, et d'écarter toute hypothèse inexacte ou même seulement incomplète.

La première section de l'ouvrage de M. Walras est consacrée précisément à établir les distinctions, définitions et principes indispensables pour l'intelligence et l'exactitude des développements qui suivront. Après un résumé historique et critique où il discute la manière dont les économistes ont jusqu'ici défini et compris l'Economie politique, l'auteur fait ressortir la distinction qu'il convient, suivant lui, d'établir dans cet ensemble assez confus, entre les questions qui relèvent de la *science*, de l'*art* et de la *morale*, et qui admettent respectivement comme criteria le *vrai*, l'*utile*, le *juste* : il y a là des aperçus d'un puissant intérêt, et il faut lire ces pages en entier pour en apprécier la justesse et la nouveauté. L'étude des questions de la première

catégorie constitue ce que l'auteur propose d'appeler l'*Economie politique pure*, science théorique qui sera à l'Economie politique appliquée (étude des questions de la deuxième catégorie) ce qu'est la mécanique rationnelle à la mécanique appliquée, c'est-à-dire la base solide et indiscutable sur laquelle doivent s'appuyer toutes les applications aux questions pratiques.

Le fait de la valeur d'échange, premier objet d'étude qui se présente au seuil de cette science nouvelle, est alors examiné au point de vue de ses causes, que l'auteur ramène à une seule, la *rareté*, définie scientifiquement comme étant la propriété que possèdent certaines choses, matérielles ou immatérielles, d'être à la fois utiles et en quantités limitées ; ces choses rares, dont l'ensemble constitue la richesse sociale, sont les seules appropriables et le sont toutes : l'industrie a pour objet de les produire ou d'en développer le nombre ou la quantité.

Ces principes posés, l'auteur aborde dans la section II le cas le plus simple de l'échange, celui de l'échange de deux marchandises entre elles sur un marché où existe la libre concurrence absolue. Il définit les courbes (ou fonctions) de demande et d'offre, et montre comment s'en déduit l'état d'équilibre par l'établissement d'un prix stationnaire, et comment le problème peut d'ailleurs admettre *une* ou *trois* solutions (dont deux seulement correspondent alors à des états d'équilibre stable). L'étude approfondie des courbes (ou fonctions) de demande l'amème ensuite à introduire de nouvelles courbes ou fonctions dites d'*utilité*, et la considération de ces nouvelles courbes ou fonctions lui permet de définir mathématiquement la *rareté* d'une marchandise donnée pour un individu donné et à un moment donné, comme étant la dérivée de la fonction qui exprime pour cet individu et à ce moment l'utilité de la quantité variable de cette marchandise supposée en sa possession ; et d'énoncer enfin la condition d'équilibre (sauf une modification dans certains cas particuliers) sous diverses formes, qu'on peut toutes ramener à la suivante :

« Pour qu'il se produise sur le marché un état stationnaire ou d'équilibre, « il faut et il suffit que les quantités des deux marchandises (A) et (B) pos- « sédées par les divers individus en présence sur le marché deviennent telles, « que le rapport de la rareté de (A) à celle de (B) soit le même pour chacun « de ces individus, ce qui leur procure à tous la plus grande satisfaction de « leurs besoins (relatifs bien entendu à ces deux marchandises) compatible « avec les quantités totales échangeables sur le marché, et avec l'existence « d'un prix unique et commun pour tout nouvel échange possible ; et ce prix « unique et commun est alors précisément égal au rapport commun des « raretés. »

Dans les sections suivantes (III, IV, V), l'auteur montre que ce théorème, convenablement généralisé dans son énoncé, s'applique encore à l'échange d'un nombre quelconque de marchandises entre elles sur un même marché, à l'établissement des prix des services et des produits consommés ou obtenus par les entrepreneurs de production, enfin à l'établissement du taux du revenu net et du prix des capitaux ; il lui faut seulement, pour obtenir dans chaque cas un nombre d'équations égal au nombre des inconnues et éviter toute indétermination dans la solution mathématique, introduire de nouvelles conditions d'équilibre, dont quelques-unes (par exemple celle relative aux échanges indirects ou arbitrages, p. 118) sont parfaitement justifiées, tandis que d'autres (égalité du prix de vente des produits et de leur prix de revient en services producteurs, absence de bénéfice et de perte pour les entrepre-

neurs de la production) ne peuvent guère être admises que provisoirement, au moins sous la forme absolue dans laquelle elles sont énoncées. Après avoir examiné en passant le rôle de la marchandise-numéraire et celui de la marchandise-monnaie, discuté et réfuté les doctrines d'Adam Smith et de J.-B. Say sur l'origine de la valeur d'échange, l'auteur obtient finalement, comme conséquence de ses déductions mathématiques, la démonstration rigoureuse de cette proposition, affirmée depuis longtemps par les économistes mais non encore scientifiquement établie, savoir : que le mécanisme de la libre concurrence en matière d'échange, de production, de capitalisation et de crédit, tend à procurer par tâtonnements successifs (jamais terminés d'ailleurs en raison de la variation continuelle des données du problème) la plus grande satisfaction possible des besoins, c'est-à-dire le maximum d'utilité des services, des produits et des capitaux neufs ; sous cette double réserve qu'il ne doive exister qu'une seule et unique proportion dans l'échange des mêmes services et produits pour tous les échangeurs, et qu'un seul et même rapport de l'intérêt net au capital pour tous les créateurs d'épargne. Il appartient alors à la théorie morale de la répartition de la richesse sociale d'examiner si cette double condition est bien conforme à l'équité : dans le cas contraire, il y aurait lieu de chercher quel autre mécanisme doit être, d'une manière générale, substitué en matière d'échange, de production ou de crédit, à celui de la libre concurrence.

La section VI, consacrée à la théorie mathématique de la circulation et de la monnaie, présente un intérêt tout particulier, en raison des conclusions, assez peu conformes aux idées actuellement les plus répandues, auxquelles l'auteur est conduit par l'emploi de ses méthodes. Il démontre en effet que l'usage simultané, comme monnaies légales, de n marchandises différentes, laisse indéterminées $n - 1$ inconnues sur les $3n$ que comporte le problème, en sorte que le législateur peut (et doit même) intervenir pour fixer les rapports soit de prix soit de quantités (utilisées comme monnaies) entre $n - 1$ de ces marchandises et la $n^{\text{ième}}$; que si ces rapports sont fixés de manière à satisfaire à certaines conditions qu'il indique, le bimétallisme par exemple dans le cas du double étalon peut pratiquement fonctionner sans tendre à dégénérer en un monométallisme de fait où le métal déprécié aurait totalement chassé de la circulation le métal apprécié ; qu'enfin il n'y a aucune impossibilité théorique de réaliser une fixité de valeur à peu près parfaite de l'étalon monétaire.

Jusqu'ici, l'auteur n'a étudié les phénomènes économiques qu'au point de vue statique, tout en ayant soin de déduire de la forme même des équations d'équilibre le sens de la variation de chaque phénomène lorsque l'une ou l'autre des données est supposée varier dans un sens déterminé.

Dans la section VII, il aborde le point de vue dynamique, en étudiant ce qui se passe sur un marché permanent, et en recherchant les lois de variation des prix dans une société progressive. Il introduit à cet effet, pour chaque genre de production, une nouvelle fonction dite de fabrication, qui joue un rôle analogue à celui de la fonction d'utilité de la section II, et dont les dérivées partielles, qu'il appelle productivités marginales, déterminent les taux de rémunération des divers services producteurs utilisés. Suit un examen critique des théories célèbres de Malthus, de Ricardo, de J. Stuart-Mill, et de la doctrine des physiocrates.

La huitième et dernière section est consacrée à l'étude sommaire des

modifications qui se produisent dans les lois économiques précédemment démontrées, lorsque l'hypothèse d'un marché régi uniquement par la libre concurrence absolue cesse d'être admissible. Tarifs maxima ou minima, droits protecteurs ou prohibitifs, monopoles, émissions de papier-monnaie, impôts, taxes fiscales : tels sont les principaux points succinctement examinés par l'auteur, qui réfute en passant les théories de Cournot et de Dupuit sur l'utilité.

La rapide analyse que nous venons de faire de l'ouvrage de M. Walras montre suffisamment le nombre et l'importance des problèmes qui y sont étudiés, ainsi que l'intérêt exceptionnel que présente cette tentative d'appliquer les méthodes mathématiques à des matières que l'on a été trop disposé jusqu'ici, en France du moins, à ne traiter que par des procédés littéraires, plus propres à faire valoir le talent d'exposition ou de dialectique des auteurs, qu'à pénétrer vraiment dans la connaissance intime des lois qui régissent l'ensemble si complexe des faits du monde économique. L'absence ou plutôt l'abstention systématique de tout procédé véritablement scientifique est assurément d'ailleurs une des causes du discrédit où sont tombées, auprès de beaucoup d'esprits sérieux, les doctrines de l'Economie politique classique.

Nous devons toutefois formuler quelques réserves, non quant à l'exactitude, qui ne nous paraît sujette à aucune objection, des méthodes mathématiques employées par M. Walras, mais quant à certains détails et au mode général d'exposition adopté. Nous n'insisterons pas plus qu'il ne convient sur quelques définitions peu heureuses à notre avis (par exemple l'utilité extensive de la section II, qui n'est nullement une *utilité*, mais bien une *quantité* de marchandise, savoir celle qui serait demandée au prix zéro, et qui devrait par conséquent être appelée quantité limite de satiété ou de saturation) ; ni sur le développement donné à la partie polémique, développement peut-être indispensable puisque l'ouvrage s'adresse surtout à des hommes faits, déjà plus ou moins imbus des doctrines anciennes, mais qui ne serait pas à sa place dans un livre rédigé en vue d'enseigner à la jeunesse la science nouvelle ; ni enfin sur la complication de certaines démonstrations, notamment dans la deuxième section. Nous voulons parler surtout de la préférence très marquée de l'auteur pour l'emploi des notations algébriques, à l'exclusion de la représentation géométrique. Il est vrai que dans l'appendice n° 1 placé à la fin du volume et intitulé « théorie géométrique de la détermination des prix » M. Walras paraît revenir sur cette préférence trop absolue et essaie d'étendre l'emploi de la représentation géométrique à des cas plus compliqués que celui de l'échange de deux marchandises entre elles. Mais nous sommes persuadé qu'il serait facile de tirer un meilleur parti de ce mode de représentation, sauf à sacrifier un peu de la rigueur absolue, ce qui n'est vraiment pas un inconvénient grave, pourvu que le lecteur soit averti, et sache qu'on lui donnera plus loin des méthodes algébriques absolument rigoureuses. Et d'autre part l'avantage de la représentation géométrique, même approximative, est évident : car la plupart des fonctions qu'il faut introduire dans ces théories, bien que parfaitement déterminées au fond, ne pourraient être remplacées dans les formules par des expressions analytiques déterminées, sans exposer à obtenir des résultats inexacts, attendu que ce n'est qu'en laissant ces fonctions indéterminées qu'on peut tenir compte de ce qu'il y a d'inconnu et de variable dans l'état d'esprit des individus considérés

comme consommateurs, échangeurs, vendeurs de services productifs ou consommables, etc. Mais si cet état d'esprit ne se laisse pas traduire par des équations explicites comme seraient par exemple celles d'une parabole ou d'une hyperbole, il est cependant certain que les fonctions qui s'introduisent ainsi en économie politique pure ont *nécessairement* des allures d'ensemble déterminées et connues, et de même par conséquent les courbes qui les représentent. Or il est beaucoup plus facile de déduire et de montrer les conséquences résultant par exemple de la courbure plus ou moins accusée d'une courbe et de sa forme plus ou moins anguleuse, que de raisonner (ce qui au fond revient au même) sur les variations plus ou moins rapides des valeurs des dérivées successives de la fonction correspondante. C'est ainsi que M. Walras n'a pas trouvé l'occasion de signaler la différence de forme de la courbe personnelle d'utilité, suivant qu'il s'agit d'une marchandise satisfaisant (seule) à un besoin de première nécessité ou à un besoin de luxe, différence qui en entraîne une correspondante et bien remarquable dans l'amplitude de la variation du prix lorsque la quantité présentée sur le marché pour la consommation pendant une même période vient à varier (il aurait d'ailleurs fallu, pour apercevoir et faire ressortir cette différence, opérer avec la courbe d'utilité et non avec celle de rareté, qui en dérive, mais qui oblige d'autre part à introduire des comparaisons d'aires à contours curvilignes, moins commodes et surtout parlant bien moins aux yeux que des comparaisons de longueurs ou d'angles).

Quoiqu'il en soit, l'ouvrage de M. Walras n'en est pas moins très remarquable, et mérite d'être étudié à fond par tous ceux qui s'intéressent aux problèmes économiques et sociaux, et qui possèdent les éléments de l'analyse et de la géométrie analytique. Nous serions bien surpris si sa lecture n'inspirait à tous ceux qui ne sont pas aveuglés par des préventions absolues, cette conviction, qui est la nôtre depuis bien longtemps, savoir qu'il est *possible* et dès lors *nécessaire* d'introduire la rigueur des procédés mathématiques dans l'étude des phénomènes économiques ; et à quelques-uns tout au moins, le désir de travailler pour leur part au développement prochain et considérable certainement réservé à cette science nouvelle, dont M. Walras a si heureusement défini l'objet, posé les principes et institué les méthodes fondamentales.

R. Perrin (Paris).

Fr. Michel. — **Recueil de problèmes de Géométrie analytique** à l'usage des classes de mathématiques spéciales; solutions des problèmes donnés aux concours d'admission à l'Ecole Polytechnique, de 1860 à 1900. Un volume in-8° de 240 pages, avec 60 figures ; prix : 6 francs. Paris, Gauthier-Villarès, 1900.

En réunissant en un petit volume les problèmes de Géométrie analytique donnés aux concours d'admission à l'Ecole Polytechnique, de 1860 à 1900, M. Michel rend un grand service non seulement aux candidats à cette école, mais encore à tous ceux qui enseignent la Géométrie analytique. Cette collection constitue, en effet, un véritable recueil d'exercices. Chaque question est résolue sous une forme aussi simple et aussi complète que possible ; elle est toujours accompagnée des indications bibliographiques permettant au lecteur de se reporter à d'autres solutions.

Les problèmes ont été groupés dans l'ordre chronologique. En regard de chaque énoncé, l'auteur a eu soin de placer l'indication de la classification du répertoire bibliographique. C'est là une mesure très heureuse qui permettra au lecteur de se familiariser de bonne heure avec la notation du répertoire; mais elle est incomplète par le fait que l'auteur aurait pu en tirer profit pour donner, à la fin de l'ouvrage, une table indiquant la classification des problèmes d'après la nature du sujet.

L. Bachelier. — **Théorie de la spéculation** (thèse); in-4°, 70 p.; Paris, Gauthier-Villars, 1900.

A chaque instant l'homme se détermine on peut dire d'après un calcul rapide de probabilité mentale fondé sur des souvenirs présents à sa mémoire à l'instant de sa détermination. De même les groupes sociaux comme le commerce et la finance participant de la vie mentale de l'homme et conduits plus spécialement d'ailleurs par quelques-uns des individus qui les forment, obéissent aux mêmes opérations mentales, préliminaires de toute action.

Ces idées ne sont peut-être pas courantes, mais une observation intime permet de s'en rendre compte avec facilité. Comme corollaire, il en découle cette proposition sur le groupe de la Bourse : à chaque instant précis le marché admet une loi de probabilité de variations de cours, par un procédé analogue à celui dont se sert l'esprit individuel dans les circonstances diverses où il est appelé à se prononcer.

A tout moment, un courant mental emporte dans une même direction l'esprit des gens d'un groupe social, d'après une probabilité moyenne jugée bonne par les membres les plus influents de la majorité du groupe. Cette majorité est d'autant plus grande que les intelligences sont mieux renseignées, mieux éduquées économiquement, plus calmes et plus justes dans leurs observations et leurs déductions; il y a là une question de « science moyenne » et de « logique moyenne » tout à fait fondamentale à l'origine des courants économiques qui mènent le monde. J'ai cru bon de donner ces aperçus rapides sur la « psychologie économique » qui pourra certainement un jour être établie à l'état de science au même titre que la psychologie expérimentale ; les résultats de cette psychologle, tirés de statistiques nombreuses et de lois prudentes, seront repris par le calcul des probabilités qui avec l'ordre des mathématiques produira les simples intentions des masses, les calculs vagues et incertains des individus, en chiffres précis. Les calculs d'assurances sont le premier chapitre de cette nouvelle science. M. L. Bachelier vient d'y ajouter un second chapitre que nous résumerons brièvement.

L'auteur remarque que la détermination des mouvements de la Bourse est subordonnée à un nombre infini de facteurs et que les opinions contradictoires relatives à ces variations se partagent si bien qu'au même instant les acheteurs croient à la hausse, les vendeurs à la baisse. Oui, cependant parmi les spéculateurs il en est qui, sans que le marché s'en doute, le dirigent et s'efforcent de lui faire adopter la loi de probabilité qu'ils admettent; le marché réfléchit et pense avec eux. Le marché ayant en quelque sorte une personnalité mentale, se détermine à un instant donné suivant une loi de probabilité, dont n'ont conscience que les grands financiers qui en sont maîtres. Si la Bourse c'est-à-dire l'ensemble des spéculaseurs ne peut

prévoir à très longue échéance les mouvements finis, elle les considère comme plus ou moins probables. M. L. Bachelier s'est proposé de rechercher et d'établir la formule qui en exprime la probabilité.

Succinctement M. Bachelier définit et explique les opérations de Bourse : opérations fermes, opérations à primes options... La partie technique ainsi présentée, l'étude des probabilités dans les opérations de bourse est abordée. Deux sortes de probabilités se trouvent ici :

La probabilité que l'on pourrait appeler mathématique ; c'est celle que l'on détermine *a priori* ; celle que l'on étudie dans les jeux de hasard.

La probabilité dépendant de faits à venir et par conséquent impossible à prévoir d'une façon mathématique, c'est cette dernière probabilité que les individus comme les groupes sociaux cherchent à réduire le plus possible, et qui cependant seule différencie véritablement le spéculateur heureux qui la fait du spéculateur malheureux.

Ces préliminaires posés, M. Bachelier se propose de déterminer la loi de probabilité qu'admet le marché ; car « si le marché ne croit à un instant donné ni à la hausse ni à la baisse, il peut supposer plus ou moins probables des mouvements d'une certaine amplitude ».

La probabilité p pour que le cours x soit coté à une époque donnée est une fonction de x; cette probabilité est régie par la loi de Gauss ; quant à l'espérance mathématique elle est proportionnelle à la racine carrée du temps.

L'auteur étudie ensuite la probabilité dans un intervalle donné et le rayonnement de la probabilité : chaque cours x rayonne pendant un élément de temps vers le cours voisin une quantité de probabilité proportionnelle à la différence de leurs probabilités. M. Bachelier en déduit que la probabilité P, pour que le cours x se trouve à l'époque t dans l'intervalle x, ∞ satisfait à une équation de Fourier.

Les écarts de prime sont étudiés alors. La théorie exposée à ce sujet conduit à cette proposition élégante, que « la valeur de la prime simple doit être proportionnelle à la racine carrée du temps »; quelques autres propositions suivent parmi lesquelles il faut noter celle-ci en passant : la probabilité de réussite de l'option au double est 0,394 et l'option réussit quatre fois sur dix ; la probabilité de l'option au triple est 0,33 et l'option réussit une fois sur trois.

Après l'exposition de la théorie générale des probabilités, application est faite de celle-ci aux opérations sur les valeurs et plus particulièrement sur la rente. On voit dans les quelques pages qui leur sont consacrées, que « neuf fois sur dix, un achat de vente au comptant produit un bénéfice au bout d'un an »; dans l'étude des opérations à prime, M. Bachelier a l'excellente idée de comparer la probabilité calculée à la probabilité observée ; on est surpris de la ressemblance des résultats ainsi obtenus, qui s'étend à des variétés nombreuses d'opérations.

Les opérations complexes qui résultent des différentes combinaisons possibles d'opérations fermes et d'opérations à prime, conduisent à des questions difficiles dont la solution, ici, est seulement esquissée.

L'étude de la probabilité pour qu'un cours donné soit atteint ou dépassé dans un intervalle de temps donné conduit à cette proposition : « la probabilité pour qu'un cours soit atteint ou dépassé à l'époque t est la moitié de la probabilité pour que ce cours soit atteint ou dépassé dans l'intervalle de

temps t »; cette étude est suivie d'applications très intéressantes aux opérations complexes de Bourse.

M. Bachelier termine sa thèse par une remarque qu'il est bon de commenter : « si à l'égard de plusieurs questions traitées dans cette étude, j'ai comparé les résultats de l'observation à ceux de la théorie, ce n'était pas pour vérifier des formules établies par les méthodes mathématiques, mais pour montrer seulement, que le marché à son insu, obéit à une loi qui le domine : la loi de la probabilité ». Cette remarque donnée comme conclusion d'un travail original appuyé sur des documents nombreux, apparaît comme une confirmation de l'idée que je présentais brièvement au début de ce résumé, c'est-à-dire que tout groupe social a des tendances à se déterminer comme tout individu, d'après une probabilité préalable en rapport immédiat avec les documents qu'il possède sur les objets qui entrent dans son jugement. Nous devons à la fois remercier M. Bachelier de nous avoir donné un aussi beau travail scientifique et le féliciter de son intéressante initiative. Il y a là une question de confiance heureusement résolue pour les mathématiciens futurs, qui par l'usage des statistiques de plus en plus riches et précieuses ainsi que par l'emploi des procédés et des symboles de l'analyse, établiront une science économique, avec un succès égal à celui des audacieux qui crurent la mécanique rationnelle et la physique mathématique.

L. Desaint (Paris).

E. Delage. — **La chiffrocryptographie** à transmutations numériques variables, ou l'Art de s'écrire en secret absolu avec des chiffres ; in-18, 64 p. ; prix, 2 francs, chez l'auteur, 5, rue de Mogador, Paris, 1900.

Le titre un peu compliqué en apparence qu'a adopté l'auteur dérive selon lui de la nécessité de distinguer les écritures secrètes où l'on emploie des chiffres de celles où l'on emploie des lettres. Son système repose essentiellement sur l'emploi d'un tableau (transmutographe) où les sons, et non pas seulement les caractères, sont représentés par des groupes de deux chiffres. Il expose successivement deux systèmes, arrive ensuite à quelques conseils de pratique générale, donne enfin plusieurs tableaux, un code de phraséologies fixes, et des éléments phraséologiques.

C'est une étude des plus consciencieuses, et théoriquement intéressante au point de vue mathématique. Quant à l'impossibilité *absolue* du déchiffrement, c'est une question sur laquelle il est prudent de ne se prononcer qu'après expérience faite, tellement est grande l'habilité de divination de certains spécialistes. Il semble cependant que les procédés de M. Delage sont très supérieurs à la plupart des « chiffres » connus, par exemple aux écritures historiques secrètes dont la traduction fit à juste titre un certain bruit, il y a quelques années.

J.-H. Graf et Ed. Gubler. — **Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Funktionen ;** I, die Bessel'schen Funktionen erster art (143 p.) ; II, die Bessel'schen Funktionen zweiter Art (156 p.) ; prix : fr. 8. ; Wyss, Berne, 1899.

L'étude de la théorie des fonctions bessélienne offre un vif intérêt à plusieurs point de vue. Ces fonctions constituent par leur définition et par

leurs propriétés une extension naturelle des fonctions trigonométriques; elles fournissent un exemple simple pour les méthodes générales de la théorie des fonctions et de celle des équations différentielles linéaires; enfin elles s'offrent d'elles-mêmes dans une foule d'applications importantes en Physique et en Mécanique céleste.

Aussi la littérature qui les concerne comprend-elle — outre les mémoires originaux — nombre de monographies plus ou moins étendues. Celle que nous devons à la plume autorisée de MM. Graf et Gubler est non seulement la dernière en date, mais nous paraît ne pas pouvoir être assez recommandée à l'attention des personnes qui s'occupent de cette partie de l'Analyse. L'étudiant, en particulier, qui connaît déjà les fonctions bessëliennes par leurs applications, trouvera dans cet ouvrage de quoi approfondir dans tous les sens ses connaissances au point de vue théorique. Les auteurs ont en effet laissé de côté toute application; leur but unique était d'exposer la théorie de Bessel, d'après les idées de l'illustre Schlæfli, d'une manière aussi parfaite que possible.

L'ouvrage se compose de deux fascicules. Le premier est consacré aux fonctions bessëliennes de première espèce. Il débute par une introduction historique où se reconnaît l'érudition toujours bien informée de M. Graf. Dans les cinq chapitres suivants, nous trouvons exposées, par des méthodes en grande partie personnelles aux auteurs, les propriétés et les diverses formes des fonctions de Bessel $J_n(x)$, ainsi que des fonctions complémentaires et associées $K_n(x)$, $P_n(x)$, $Q_n(x)$; valeurs asymptotiques des $J_n(x)$ pour $x = \infty$; racines des $J_n(x)$, développement d'une fonction arbitraire en séries de la forme $\Sigma A_\lambda J_n(\beta_\lambda x)$ où β_λ sont les diverses racines de $J(\beta_\lambda) = 0$. A signaler l'usage si habile qui est fait aux chapitre II et V des lacets et autres intégrales complexes.

Le deuxième fascicule, en huit chapitres, s'occupe surtout des fonctions de deuxième espèce. Elles sont définies, non comme secondes solutions à point logarithmique de l'équation différentielle des $J_n(x)$, mais d'après C. Neumann et Schlæfli. Si l'on développe la fonction $\frac{1}{x-y}$ en série de la forme $O^0(x)J^0(y) + 2\Sigma O^n(x)J^n(y)$, $O^n(x)$ est la fonction de seconde espèce. La définition est entièrement analogue à celle qui est en usage pour les fonctions sphériques. Les $O^n(x)$ sont des polynomes en $\frac{1}{x}$. L'étude de leurs propriétés, des équations différentielles qu'ils vérifient, de leurs relations avec $J_n(x)$ et la complémentaire $K_n(x)$ remplit les trois premiers chapitres. Les cinq derniers contiennent des exemples de développements suivant des fonctions bessëliennes de première et de seconde espèce, les formules d'addition, développement en fractions contiuues et polynômes de Schlæfli, relation des fonctions bessëliennes avec les séries hypergéométriques ou l'étude de l'intégrale de Schlæfli $\int_0^\infty J_a(x)e^{-nx}\, x^{c-1}\, dx$ enfin, intégrale discontinue de Gubler $\int_0^\infty J_m(cx)\, J_n(x)dx$.

Si les indications précédentes permettent de comprendre le plan de l'ouvrage et la richesse des matières traitées, il ne peut donner qu'une idée bien insuffisante de la manière distinguée dont les auteurs ont rempli leur

programme. Leur ouvrage doit être consulté par toutes les personnes qui ont à s'occuper des fonctions de Bessel; ajoutons que des indications bibliographiques très complètes permettent au lecteur de s'orienter dans la littératnre du sujet.

C. Cailler (Genève).

Th. Crivetz. — **Essai sur l'équidistante**, in-8°, 50 p.; Bucarest, Inst. C. Göbl, 1900.

Nouveau travail sur le postulatum d'Euclide. L'auteur examine quelques propriétés de la ligne plane équidistante d'une droite donnée du plan. Ensuite il s'attache à conclure que cette ligne équidistante se compose de deux droites parallèles. Il considère que la théorie des parallèles, la somme des angles d'un triangle rectiligne, la nature des équidistantes d'une ligne droite donnée sont intimement liées et forment un seul problème.

La brochure de M. Crivetz sera certainement lue avec intérêt par tous les mathématiciens que passionne la lutte des euclidiens et non-euclidiens, dont les lecteurs de l'*Enseignement Mathématique* ont été déjà souvent entretenus.

Briefwechsel zwischen Carl Friederich Gauss und Wolfgang Bolyai, mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von Franz Schmidt und Paul Staeckel. Un vol. in-4°, de xvi-208 p., relié, prix : fr. 20. — B.-G. Teubner, Leipzig, 1900.

Si le nom de Gauss est inséparable de celui de W. Bolyai dans l'histoire de la science, cela ne tient pas seulement au fait qu'ils restent tous deux attachés à un même domaine de recherches, mais aussi à l'amitié profonde qui liait ces deux géomètres. Gauss et Bolyai se sont rencontrés pour la première fois à l'Université de Goettingue en octobre 1796 ; l'un était âgé de dix-neuf ans, l'autre de vingt-deux. Ils passèrent ensemble plus de deux années dans une grande intimité à la poursuite d'un même idéal. Tous deux portèrent déjà leur attention sur les problèmes fondamentaux de la science, et c'est à ce moment-là qu'ils échangèrent leurs premières réflexions sur les fondements de la Géométrie qui devaient les préoccuper jusqu'à la fin de leur vie. Ils se séparèrent en mai 1799 et, bien que les circonstances ne leur permirent plus de se revoir, ils restèrent en correspondance pendant plus d'un demi-siècle, jusqu'à la mort de Gauss, en février 1855; Bolyai mourut au mois de novembre de l'année suivante.

C'est cette correspondance qui a été recueillie et annotée par MM. Schmidt et Stackel et qui vient d'être publiée en un superbe volume, grâce à l'appui de l'Académie des Sciences de Budapest. Elle apporte une foule de détails nouveaux sur la vie intime des deux savants. Il ne s'agit donc pas d'une simple correspondance scientifique, mais de lettres échangées entre deux amis intimes qui se communiquent de temps à autre tout ce qui les préoccupe dans le domaine de la science pure comme dans celui de la vie ordinaire.

Ces lettres nous permettent de suivre Gauss dans sa carrière scientifique remplie de gloire et dans sa vie privée exempte de grands soucis, tandis que, d'autre part, elles nous montrent Bolyai, isolé en Hongrie dans un milieu entièrement réfractaire aux mathématiques et continuellement en lutte avec

les difficultés de la vie. Gauss avait pour Bolyai non seulement une grande amitié, mais il le tenait aussi en grande estime comme savant; la partie scientifique de ses lettres en est une preuve certaine. Nous ne pouvons, dans ce compte-rendu, entrer dans le détail des questions mathématiques examinées dans cette correspondance; on y trouve des traces de la plupart des travaux que nous ont laissés les deux savants. La question des fondements de la Géométrie se présente à plusieurs reprises. Bolyai y consacrait une grande partie de ses moments de loisir. En 1804, il adresse à Gauss un *Essai* intitulé : *Theoria parallelarum*. Mais, découragé à la fois par l'insuccès de ses recherches et par les soucis que lui procurent sa vie privée, il abandonne pour quelque temps les mathématiques. Cependant, il lui est réservé le bonheur de voir son fils Jean reprendre ses recherches et y laisser un mémoire remarquable. Né en 1802, Jean Bolyai montra de bonne heure des dispositions particulières pour les mathématiques. A l'âge de treize ans il possédait déjà le Calcul différentiel et intégral et la Mécanique; les ouvrages d'*Euclide*, d'*Euler* et de *Véga* lui étaient familiers; aussi son père pouvait-il écrire à Gauss, en 1816 : « Dois-je lui faire lire la théorie des fonctions de Lagrange ? » En 1831 W. Bolyai soumet à la critique de Gauss le mémoire, aujourd'hui classique, de son fils Jean. Dans sa réponse Gauss écrit : « Si je te dis d'abord que je ne puis louer ce mémoire, cela te laissera sans doute stupéfait pendant un instant; mais je ne puis faire autrement; le louer serait me faire des éloges à moi-même ». Puis il exprime son admiration pour ce travail qui par la méthode et les résultats coïncide entièrement avec ses propres recherches poursuivies pendant trente à trente-cinq ans.

Les passages concernant la vie privée ne sont pas moins intéressants. Ils dénotent chez ces deux savants une rare élévation d'âme. Les lettres de Bolyai expriment les sentiments de tristesse et de mélancolie d'un homme qui, par des circonstances indépendantes de sa volonté, n'a pu se consacrer entièrement à la science et donnait libre essor à ses aspirations. Cette note triste, qui va d'ailleurs en s'accentuant d'une lettre à la suivante, ne laisse pas le lecteur sans une certaine émotion. Celles de Gauss contiennent toujours des paroles de consolation et d'encouragement; elles sont pour Bolyai à la fois un précieux soutien et une source de joie profonde.

Cette *Correspondance* contient quarante-deux lettres, dont dix-huit de Gauss et vingt-quatre de Bolyai. Elle est suivie d'un *Supplementum* dans lequel MM. Schmidt et Stäckel ont réuni les lettres de Bolyai, Sartorins de Waltershausen, Kreil et Schmidt relatives à la publication des œuvres et de la correspondance de Gauss. Puis viennent une série de notes d'un grand intérêt et d'une utilité incontestable à l'historien. Les unes sont de simples annotations aux diverses lettres, les autres sont relatives à la biographie et aux travaux de chacun des géomètres.

On sait que les *œuvres complètes* de Gauss sont encore en cours de publication; elles comprendront dix volumes dont sept ont déjà paru [1]. Le tome IX contiendra, outre les travaux dans le domaine de la Géodésie, une série de documents relatifs à la biographie de Gauss.

Quant aux œuvres de Bolyai elles comprennent une série de mémoires ou traités publiés en langue hongroise, un mémoire rédigé en allemand, et son

[1] Le dernier volume paru (t. VIII, novembre 1900) contient, entre autres, les recherches de Gauss sur les fondements de la Géométrie.

remarquable ouvrage en deux volumes, intitulé : *Tentamen juventatem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria introducendi, cum appendice triplici;* tomus I, 1832, XVI + 502 p., tomus II, XCVIII + 40 p. 1833. Grâce à l'initiative de l'Académie hongroise des Sciences une seconde édition (²) de cet ouvrage est actuellement en cours de publication.

L'ouvrage que viennent de nous donner MM. Schmidt et Stäckel constitue donc un heureux complément aux publications que nous venons de rappeler. C'est une belle page de l'histoire des mathématiques pendant la première moitié du XIXe siècle. Elle sera lue avec plaisir par tous ceux qui témoignent quelqu'intérêt aux questions historiques.

H. FEHR.

FÉLIX MÜLLER. — **Vocabulaire mathématique** français-allemand et allemand-français, contenant les termes techniques employés dans les mathématiques pures et appliquées; 1er fascicule : *Français-Allemand.* Un vol. gr. in-8° de 132 p.; Prix : fr. 10. — Teubner, Leipzig, et Gauthier-Villars, Paris, 1900.

On ne saurait assez féliciter M. Müller d'avoir pris l'initiative d'un ouvrage qui est appelé à rendre de grands services à divers points de vue, et d'avoir eu le courage de poursuivre pendant plus de vingt ans un travail à la fois long et pénible. Depuis un demi-siècle, le vocabulaire mathématique s'est enrichi dans une mesure telle qu'il devient de plus en plus difficile de connaître la signification précise des termes techniques employés dans les diverses langues. Tous ceux qui ont eu à consulter des mémoires écrits dans une langue autre que leur langue maternelle savent combien il est quelquefois difficile, sinon impossible, de trouver l'équivalent exact de tel ou tel terme ; et ces termes, de création souvent récente, ne figurent pas dans les dictionnaires. Un vocabulaire mathématique constitue donc un instrument auxiliaire d'une utilité incontestable.

Pour le moment, il s'agit d'*un vocabulaire mathématique français-allemand et allemand-français.* La première partie, consacrée au vocabulaire français-allemand vient seule de paraître. M. Müller est parvenu à réunir une nomenclature de plus de dix mille termes empruntés aux sciences mathématiques pures et appliquées. Chaque terme est accompagné, outre sa traduction, d'indications concernant son emploi et souvent aussi de renseignements relatifs à son origine. Voici d'ailleurs quelques exemples :

Anomalie [astr., coord. pol.] *Anomalie, Abstandswinkel, Abweichung.* — **D'Encke** [astr.] *Enckes Anomalie.* — **excentrique** (d'un point d'ellipse, de l'ellipsoïde) [géom. anal.] *excentrische Anomalie.* — **moyenne** (d'une planète) [astr.] *Mittlere Anomalie.* — **de l'orbite** [astr.] *Bahnanomalie.* — **partielle** [astr.] *partielle Anomalie.* — **du soleil** [astr.] *Sonnenanomalie.* — **vraie** [astr.] *wahre Anomalie.*

(²) Le tome Ier seul vient de paraître. Il a pour titre : *Conspectus arithmeticæ generalis.* Mandato academiae scientiarum hungaricae suis adnotationibus adiectis ediderunt I. KÖNIG et M. RÉTHY, academiae scientiarum hungaricae sodales (un vol. de XII + 679 p. Teubner, Leipzig.)

Lacet (courbe élémentaire ou d'intégration d'une fonction) (BRIOT et BOUQUET) [fonct. génér.] *Schleife, Elementarcurve.* — **des points critiques** [fonct. génér.] *Schleifenlinie um die Kritischen Punkte.*

Relief (DESARGUES, BOSSE, 1665, PETITOT, 1759) [géom. descr.] *Relief, Bild, Flachbild.*

Un pareil ouvrage n'est pas exempt de critique. M. Müller s'en rend compte mieux que tout autre, aussi recevra-t-il avec reconnaissance les corrections et additions qu'on voudra bien lui signaler. Ainsi, on pourra constater l'absence de quelques termes, peu usités il est vrai. D'autre part, il y aura lieu de revoir certaines indications historiques et d'apporter quelques compléments quant aux diverses interprétations d'un même mot; par exemple on lit au mot *semi-convergent :* **semi-convergent, e** (série) *halbeonvergent.*

Il manque ici la dénomination *bedingt convergent* qui doit même être placé avant l'autre; elle correspond au sens généralement adopté pour les séries dites « semi-convergentes » par opposition aux séries « absolument convergentes ».

A côté de son utilité dans les traductions, cet ouvrage poursuit encore d'autres buts. D'une part, il apporte une heureuse contribution à l'élaboration d'une *terminologie mathématique* et, par suite, fera certainement faire un pas décisif dans ce sens. Cette question a déjà été soulevée à diverses reprises, en particulier au premier congrès international des mathématiciens à Zurich, en 1897; elle devait être reprise au Congrès de Paris, aussi M. Müller avait eu la délicate intention d'inscrire en tête de ce premier fascicule : DÉDIÉ AU CONGRÈS INTERNATIONAL DES MATHÉMATICIENS A PARIS, EN 1900. Mais, faute de rapporteur disposé à entreprendre un travail aussi aride, la question reste à l'ordre du jour du prochain congrès.

D'autre part, ce vocabulaire pourra servir de base à un *dictionnaire encyclopédique des sciences mathématiques* qui viendrait ainsi compléter d'une manière utile l'Encyclopédie de MM. Meyer et Burkhardt, et son édition française publié par M. Molk. Les matériaux que réunissent actuellement les collaborateurs de l'Encyclopédie. ainsi que ceux que pourront fournir MM. J. Boyer, Brocard, Loria, et d'autres, faciliteront dans une grande mesure la publication préconisée par M. Müller. « J'espère, dit-il dans sa Préface, que mon vocabulaire fera naître chez beaucoup de mes collègues le désir que quelques mathématiciens se réunissent pour publier en commun un dictionnaire mathématique » Nous espérons que ce vœu ne tardera pas à se réaliser, et que M. Müller parviendra lui-même à grouper autour de lui quelques savants disposés à consacrer une partie de leur temps à cette importante publication.

H. FEHR.

BAGNOLI (ENRICO). — **Geometria rettilinea e curvilinea trattata con metodo preeuclidico e Cronogoniometria.** Roma, Ermanno Lœscher et C°, s. d., 1 vol. in-8° et 1 atlas.

L'ouvrage que M. Bagnoli vient de publier sous ce titre constitue une exposition originale de la géométrie élémentaire sous une forme essentiellement pratique. Le but principal que l'auteur s'est proposé est de faire

progresser parallèlement l'étude de la géométrie et le calcul numérique. De la comparaison incessante des nombres et des figures doit résulter, suivant lui, un réel avantage sur la méthode synthétique universellement adoptée depuis Euclide. Nous ne saurions être, bien entendu, aussi affirmatif que M. Bagnoli, les critiques qu'il adresse au système classique nous paraissant quelque peu exagérées. Mais nous reconnaissons volontiers que l'enseignement de la géométrie élémentaire, dans les écoles techniques, gagnerait peut-être à l'emploi de tels procédés.

Le traité de M. Bagnoli, écrit dans un style sans prétention est, comme l'auteur le déclare modestement, à la portée des intelligences les moins initiées aux mathématiques.

Maurice GODEFROY.

La recente geometria del triangolo, par le Prof. CRISTOFORO ALASIA, città di Castello, Lapi, 1900, 3 lire.

A part quelques très intéressants articles de M. E. Cesàro dans les N. A. *Sur le droit de Simson*, puis, *Remarques sur la Géométrie du triangle* (où sont étudiées les coordonnées d'inertie) 1887, une étude de M. Azzarelli sur les centres isogones *Atti dei Nuovi Lincei*, 1886, et différentes notes de M. Lugli dans le *Périodico di Matematica*, 1891, 1895, les géomètres italiens n'ont fait jusqu'ici, à ma connaissance, que peu de travaux qui aient marqué, sur la récente géométrie du triangle, et ils n'ont guère contribué à l'établissement du corps de doctrine que cette branche forme maintenant dans la science ; il est donc curieux que le premier ouvrage d'ensemble, fait sur elle, soit l'œuvre d'un géomètre italien. J'ignore la cause à laquelle est due cette quasi-abstention, mais on peut constater que les géomètres italiens avaient cependant vu l'intérêt des nouvelles études car, l'éditeur ayant eu l'originale idée de mettre, comme épigraphe au volume, le fac-similé d'une carte, à lui adressée, par l'illustre Beltrami sur laquelle étaient écrits les mots dont voici la traduction :

« *Pourquoi l'éditeur du prof. Alasia n'entreprendrait-il pas un ouvrage sur la nouvelle géométrie du triangle dont les éléments sont disséminés dans les périodiques scientifiques ; il serait doublement intéressant d'avoir entrepris en Italie le premier ouvrage sur le sujet...* »

Cette recommandation, venant de si haut, prouve qu'elles n'étaient point dédaignées ou inaperçues.

La carte de Beltrami date, d'après la note initiale de l'éditeur, du 15 octobre 1899 ; la réponse a été l'ouvrage du Prof. Cristoforo Alasia.

Il serait trop long d'en donner ici un compte rendu détaillé, mais comme le sujet traité est parfaitement défini, les lecteurs savent d'avance quelles sortes de questions s'y trouvent, il suffira donc d'en indiquer brièvement le plan général.

Après une préface historique constatant que la géométrie récente du triangle s'est formée avec ses prodigieux développements à la suite du mémoire de M. E. Lemoine (*Sur quelques propriétés d'un point remarquable du triangle*, Congrès de Lyon de l'Association française pour l'avancement des sciences, 1873), et marquant les phases principales de sa créations, M. C. Alasia résume en un court chapitre les connaissances antérieures qui ont leur place dans la géométrographie, puis il entre pleinement dans le

sujet de son ouvrage en notant avec soin les sources de ce qu'il y traite. L'ouvrage est bien conçu, clair, riche en matières ; tout est présenté d'une façon élémentaire qui donnera aux jeunes géomètres le goût et la curiosité de ces études. La lecture en est très facile, même pour les personnes qui, comme moi, ne sont pas familiarisées avec la langue italienne ; nous la conseillons à ceux qui veulent s'initier à la géométrie du triangle ; pour ceux qui la pratiquent, c'est un livre à consulter fréquemment, qu'il leur sera utile d'avoir sous la main.

L. Ripert.

J. Fitz Patrick et G. Chevrel. — **Exercices d'Arithmétique**, énoncés et solutions, avec une préface de J. Tannery ; 2e édition, 1 vol. gr. in-8, xiv-680 p. ; pr. 10 fr. ; Paris, A. Hermann, 1900.

L'éloge du Recueil d'exercices dont il s'agit n'est plus à faire. Depuis plusieurs années déjà, tous ceux qui s'occupent de l'enseignement de l'Arithmétique en ont tiré profit, et ont vérifié la profonde exactitude des appréciations de M. J. Tannery, écrivant dans la Préface de ce livre :

« Je l'ai parcouru avec un vif intérêt ; on y trouvera un grand nombre de questions sur les diverses parties de l'Arithmétique, depuis la numération jusqu'à ces régions qui donnent accès dans la théorie des nombres. Toutes ces questions sont instructives et beaucoup d'entre elles m'ont paru nouvelles et ingénieuses... Les solutions sont simples et élégantes. Je crois que ce livre rendra de grands services aux élèves et aux maîtres. »

Cette deuxième édition ne diffère de la première que par des additions importantes. D'une part, on y trouvera plus de 500 exercices proposés, du même genre que les problèmes déjà résolus dans l'ouvrage ; c'est là un avantage sensible au point de vue de l'enseignement, nous pourrions presque dire une nécessité. En second lieu, toute une partie nouvelle (environ 140 pages) a été ajoutée, contenant des applications d'Arithmétique commerciale. Elles portent sur le système métrique, sur les proportions, les questions d'intérêt, d'escompte, les partages proportionnels, les mélanges, les alliages, les fonds publics, les opérations de bourse et de banque.

Sous cette forme nouvelle, l'excellent recueil de MM. Fitz-Patrick et Chevrel devient donc un ouvrage essentiellement pratique, sans rien perdre de ses autres qualités.

C. A. L.

G. Holzmüller. — **Elemente der Stereometrie ;** zweiter Theil : Die Berechnung einfach gestalteter Körper, mit 150 Figuren und zahlreichen Uebungsbeispielen. 1 vol. in-8° de 477 p. ; prix : M. 10 ; G. J. Goeschen. Leipzig, 1900.

Cet ouvrage forme la deuxième partie du traité de *Stéréométrie* dont nous avons présenté la première partie il y a un an (*L'Ens. math.*, t. II, p. 66). Il est spécialement consacré à l'application des diverses théories énoncées dans la première partie. Son principal objet est l'étude approfondie des calculs relatifs aux solides, à savoir : les polyèdres simples, le cylindre, le cône et la sphère.

Les grandes divisions de l'ouvrage sont donc indiquées naturellement par

ces quatre sujets; il est en effet divisé en quatre sections dont les titres correspondent à peu près à ceux-ci, comme nous le verrons plus loin. Chaque section renferme un certain nombre de subdivisions se rapportant soit à un corps spécial, soit à un ensemble déterminé de propriétés du même corps. Les questions à traiter sont énoncées sous forme de problèmes dont la difficulté va en augmentant graduellement dans chaque division. Les problèmes étudiés sont très différents les uns des autres : tous les domaines dans lesquels la Géométrie trouve des applications apportent leur contingent de questions. La Mécanique théorique et pratique, la Géométrie descriptive, la Cristallographie, la Physique, la Géographie, la Géodésie, la Cartographie, l'Astronomie et l'Algèbre, sont tour à tour mises à contribution, soit pour fournir l'énoncé de problèmes à résoudre, soit pour permettre, par leurs procédés divers, la solution de certaines questions ; de cette grande variété naît un très grand intérêt pour le lecteur, qui voit avec étonnement le rapprochement de doctrines si différentes et la facilité avec laquelle certaines questions difficiles sont traitées par des procédés élémentaires.

Examinons d'un peu plus près le contenu des diverses sections de ce traité :

1re *section :* Prisme et cylindre. Sous ce titre, nous trouvons tout d'abord 14 problèmes se rapportant au cube, puis 17 questions relatives au parallélépipède rectangle. Une troisième division en renferme 11 ayant pour objet les prismes réguliers ; la quatrième division nous fait connaître diverses solutions de 29 problèmes relatifs au cylindre droit à base circulaire et l'on ne sera pas étonné du chiffre très grand de ceux-ci, car les diverses applications pratiques de ce solide sont successivement passées en revue.

Enfin la dernière division de cette section s'occupe du prisme droit à base quelconque, du prisme oblique, du tronc de prisme, des cylindres correspondants et, comme application, de l'étude des voûtes cylindriques et de leurs intersections, voûtes d'arête et voûtes en arc de cloître.

2e *section :* Cône droit a base circulaire, pyramide régulière et solides réguliers. La recherche des formules relatives aux relations entre les éléments de ces corps est groupée dans la première division de cette section, qui comprend divers paragraphes relatifs au cône, à la pyramide régulière, au tronc de cône, au tronc de pyramide, puis ensuite, aux solides réguliers examinés d'abord individuellement, puis comparés les uns aux autres.

L'auteur établit les formules générales applicables à l'un quelconque des cinq solides réguliers et donnant les rayons des sphères inscrites et circonscrites, la surface, le volume et l'angle dièdre, connaissant le nombre des faces du solide, le nombre de celles qui passent par un sommet et le nombre des côtés de chaque face.

Dans la deuxième division nous trouvons 88 problèmes montrant les applications de ces formules aux corps semi-réguliers et à leurs réciproques, ainsi qu'aux troncs de pyramide et de cône à bases non parallèles.

3e *section :* Polyèdres irréguliers et solides a surfaces gauches qui en dépendent. Les deux premières parties de cette section sont consacrées à l'étude du trièdre; on y trouve les formules trigonométriques fondamentales et leurs transformations ; les applications sont surtout empruntées au prisme oblique.

Dans la troisième division, nous trouvons une étude du tétraèdre général avec ses *huit sphères tangentes*, inscrites et ex-inscrites, la sphère circons-

crite, ses médianes, le centre de gravité de ses divers éléments, puis certaines relations entre le tétraèdre et le paraboloïde hyperbolique données déjà sans démonstration par Steiner.

Les quatrième et cinquième divisions contiennent l'étude de la pyramide générale, de l'obélisque et des prismatoïdes; ce dernier sujet, en particulier est examiné à fond; commençant par la classification et la nomenclature adoptée par Heinze pour ces corps, l'auteur examine ensuite leur volume et les modifications de ce dernier lorsqu'un élément du solide change, puis il termine par les nombreuses relations que le principe de Cavalieri permet de trouver entre ces corps et les surfaces du 2e degré.

4e *section :* La sphère. Cette section débute par le rappel des formules fondamentales relatives au volume et à la surface de la sphère, puis on y étudie les éléments de portions de sphère : segment, calotte, zône, secteur, fuseau et triangle sphérique sont examinés pratiquement par la solution de 52 problèmes. Quelques considérations astronomiques relatives au soleil, à la terre et à la lune, ainsi qu'une théorie élémentaire de la projection de Mercator et des loxodromes, permettent d'aborder des problèmes plus compliqués à la fin de cette section. Avant de les poser l'auteur applique les formules trouvées pour le trièdre à la résolution des triangles sphériques, puis il aborde les applications à l'Astronomie et à la Navigation : détermination de l'heure, du lieu, etc.

Ajoutons que dans chaque section de nombreuses indications historiques et bibliographiques viennent compléter les renseignements donnés et indiquer les sources des diverses théories énoncées.

Nous ne saurions terminer le compte rendu de ce remarquable traité sans signaler l'exécution parfaite des 156 figures intercalées dans le texte, et dont plusieurs sont de véritables épures de Géométrie descriptive.

S. May (Lausanne).

Michele de Franchis. — **Elementi di Geometria** ad uso delle seccole tecniche; 1 vol. in-12, IV-227 p., 64 fig.; pr. L., 2; Milon, Palerme, R. Sandron, 1901.

Dans ce petit livre, dont le titre indique assez le but, l'auteur a donné plus de prise à l'intuition qu'au raisonnement pur. Il croit avec raison que de la première, on arrive naturellement au second. Ayant pour préoccupation principale la clarté, il s'est cependant gardé, sous prétexte d'être clair, de présenter de faux raisonnements, et il a préféré ne pas présenter du tout de démonstration, quand pour être rigoureux il eût fallu dépasser les forces intellectuelles des élèves, plutôt que de donner une démonstration vicieuse.

Les matières sont bien ordonnées, et comprennent tous les éléments essentiels de la géométrie classique. Nous regrettons seulement que l'auteur n'ait pas adopté la méthode fusionniste qui a fait tant de progrès en Italie pendant ces dernières années, et qui nous semble indiquée surtout quand on fait appel à l'intuition. L'étude parallèle du plan et de l'espace, avec leurs analogies, offrent en effet de sérieux avantages.

En dépit de cette légère critique, le livre de M. de Franchis n'en reste pas moins un excellent manuel bien approprié à l'enseignement auquel il est destiné.

J. Ghersi. — **Metodi facili per risolvere i Problemi de Geometrica elementare**; un vol. in-12, de 190 p. (*collection Hoepli*), prix : L. 1,50; Hoepli, Milan, 1900.

Cet opuscule doit servir de guide dans la résolution des problèmes de Géométrie élémentaire. Il est destiné aux élèves des écoles moyennes en Italie. Selon l'auteur, les ouvrages italiens poursuivant ce même but renferment en général des erreurs. Les problèmes proposés sont souvent, non pas des exercices, mais des énigmes qui ont pour effet d'enlever aux élèves la confiance qu'ils peuvent avoir dans les connaissances acquises. L'auteur s'impose pour tâche de rechercher la simplicité et la clarté dans la résolution des problèmes, sans porter atteinte à la rigueur scientifique et en appropriant les questions au degré de maturité des élèves.

Il nous semble que l'auteur a su atteindre en partie le but proposé. Les explications qui accompagnent les constructions sont telles qu'il serait difficile de les présenter plus clairement et sous une forme plus concise. Par contre, l'ordre méthodique des matières donnent lieu à certaines critiques. Les questions ne sont pas toujours classées suivant le degré de difficulté, et nous croyons que, dans leur ensemble, elles ne tendent pas assez à éveiller l'intérêt des élèves.

Malgré cette légère critique, nous sommes certains que les *bons* élèves, qui utiliseront ce livre sous la direction d'un maître, en retireront un grand profit et parviendront à résoudre seuls des problèmes géométriques d'une certaine difficulté. Ils se familiariseront avec les différentes méthodes de résolution, en particulier avec celle des lieux géométriques. Par la variété même des problèmes qu'il renferme, ce recueil sera également consulté avec intérêt par le maître. Nous devons ajouter que tous les problèmes sont accompagnés de leur solution, ou tout au moins d'indications permettant d'entrevoir la marche à suivre.

J. Punchera (Coire).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

American Journal of Mathematics, edited by S. Newcomb; vol. XXII; abonnement annuel, 5 dollars; Baltimore, John Hopkins press, 1900.

N° 4 (octobre). — D.-N. Lehmer : Asymptotic evaluation of certain Totient sums. — E. Hastings Moore : Concerning Klein's Group of $(n+1)!$ n-ary collineations. — H. Ellsworth Slanght : The cross-ratio Group of 120 quadratic Cremona transformations of the planc.

The American Mathematical Monthly, publié par B.-F. Finkel et J.-M. Colow ; vol. 8, 1901 ; abonnement annuel, 2 dollars.

N° 1 (janvier). — F.-D. Roe : On a formula of interpolation. — A. Emch : Two Hydraulic Methods to extract the nth root any Number.