

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE DES DÉRIVÉES PARTIELLES DANS LA THÉORIE DES COURBES ET DES SURFACES ALGÈBRIQUES

Autor(en): **Laisant, C.-A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1901)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **25.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-4669>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

en appelant A et B les abscisses minimum et maximum des points du contour. Cela résulte encore de la remarque faite au début de ce travail, puisque x_r et x_{r+1} comprennent toujours entre elles A, et que B est toujours comprise entre x_{s-1} et x_s .

La méthode que nous venons de suivre montre, non seulement que la somme étudiée a une limite, mais que cette limite est la même quelle que soit la loi suivant laquelle on fait varier les distances analogues à $x_{i+1} - x_i$ et à $y_{k+1} - y_k$ qui interviennent dans notre démonstration. En effet, l'expression (6) conserve toujours la même valeur quelle que soit cette loi. De plus, nous aurions pu faire la même démonstration en intervertissant les rôles des différences $x_{i+1} - x_i$, $y_{k+1} - y_k$. Nous aurions trouvé une expression de la limite cherchée, différente de (6) quant à la forme, mais devant avoir même valeur numérique et même signe. De là le théorème usuel sur la possibilité d'intervertir l'ordre des intégrations indiquées dans la formule (6) sans changer le résultat.

V. JAMET (Marseille).

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE

DES DÉRIVÉES PARTIELLES

DANS LA THÉORIE DES COURBES ET DES SURFACES ALGÈBRIQUES

1. — Dans l'étude des coniques et des quadriques, on considère constamment les dérivées partielles, prises par rapport aux coordonnées, du premier membre de l'équation de la courbe ou de la surface; et il en est de même dans la théorie des surfaces algébriques en général. ..

Il semble dès lors intéressant de se demander quelle est la signification géométrique de ces dérivées, notamment lorsque l'on y remplace les coordonnées courantes par celles d'un point de la figure. Cela peut être en même temps utile pour certaines applications.

En ce qui concerne les figures du second ordre, cette interprétation est d'une telle simplicité qu'on peut sans exagération la considérer comme intuitive; et cependant les nombreux traités de Géométrie analytique que j'ai consultés sont muets sur ce point. D'autre part, les renseignements, recueillis verbalement par moi, de plusieurs professeurs de mathématiques spéciales, me portent à croire que la remarque dont il s'agit est nouvelle, en dépit de son extrême simplicité. Je dois ajouter qu'elle s'est présentée tout récemment à mon esprit, bien que depuis de fort longues années je n'aie guère cessé de m'occuper de Géométrie analytique. C'est une preuve de plus que les choses les plus simples et les plus faciles ne s'aperçoivent pas toujours immédiatement; cela montre aussi que dans l'enseignement de la Géométrie analytique, — et cela un peu partout — le calcul a pris une place peut être excessive, si bien que toute l'attention se porte sur le symbole et nous fait trop oublier l'objet.

Dans ce qui va suivre, je me propose d'établir les remarques dont je viens de parler, et d'en montrer quelques rapides applications.

2. — J'examinerai d'abord, pour plus de simplicité, ce qui concerne les figures du second ordre; et je considérerai tout de suite les quadriques, car les résultats obtenus seront applicables immédiatement aux coniques, par analogie, avec une facilité plus grande encore.

Soit donc l'équation d'une quadrique en coordonnées cartésiennes

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + \dots = 0,$$

la surface étant rapportée à des axes coordonnés quelconques.

Appelons x_1, y_1, z_1 , les coordonnées d'un point M de la surface. Si nous menons par ce point des parallèles aux trois axes coordonnés, les nouveaux points d'intersection, M_1, M'_1, M''_1 , détermineront trois cordes $\overline{M_1M}$, $\overline{M'_1M}$, $\overline{M''_1M}$, et nous aurons

$$\overline{M_1M} = \frac{f'_{x_1}(x_1, y_1, z_1)}{A}, \quad \overline{M'_1M} = \frac{f'_{y_1}(x_1, y_1, z_1)}{A'}, \quad \overline{M''_1M} = \frac{f'_{z_1}(x_1, y_1, z_1)}{A''}.$$

Ces relations existent en grandeur et en signe.

Elles sont tellement évidentes, il faut le répéter, qu'on les constate plutôt qu'on ne les démontre. Le moyen le plus simple est peut-être de remarquer que l'équation $f'_x = 0$ représentant le plan diamétral conjugué à la direction de l'axe des x , la distance du point (x, y, z) à ce plan, comptée suivant la direction de cet axe, a pour expression $\frac{f'_x}{2A}$, et que la corde M_1M est double de cette distance. De même pour les deux autres cordes.

Cependant, et en vue d'une généralisation ultérieure, nous allons présenter une démonstration proprement dite de la propriété dont il s'agit. Si dans l'équation $f(x, y, z) = 0$ nous considérons provisoirement y et z comme des constantes, nous pouvons l'écrire

$$F(x) = A(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Alors $f'_x(x, y, z)$ et $F'(x)$ sont identiques; et x_1, x_2 sont des fonctions de y et de z . Si on donne à y et z des valeurs particulières y_1, z_1 , les racines x_1, x_2 seront les abscisses des intersections de la surface et de la droite $y = y_1, z = z_1$.

Or,

$$F'(x) = \frac{F(x)}{x - x_1} + \frac{F(x)}{x - x_2}.$$

Dans cette identité, faisons $x = x_1$; elle deviendra

$$F'(x_1) = A(x_1 - x_2),$$

ou

$$f'_{x_1}(x_1, y_1, z_1) = A(x_1 - x_2),$$

ce qui démontre la propriété, puisque $x_1 - x_2$ représente justement la corde $\overline{M_1M}$. Il est clair que la même démonstration s'applique aux deux autres dérivées partielles.

3. — La propriété que nous venons d'indiquer se prête à de nombreuses applications. Nous nous bornerons ici à quelques exemples.

1° Trouver sur une conique un point M tel que les cordes $\overline{MM_1}, \overline{MM'_1}$, menées par ce point parallèlement à deux directions données, soient entre elles dans un rapport donné k .

On doit avoir $\overline{M_1M} = k\overline{M'_1M}$, ou $\frac{f'_x}{A} = \pm k \frac{f'_y}{C}$,

si la conique est rapportée à deux axes parallèles aux directions données et a pour équation $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \dots = 0$.

Donc, en coupant la conique par les droites $Cf'_x \pm kAf'_y = 0$, on a les solutions. L'ambiguïté du double signe disparaîtrait si l'on s'était donné un sens des directions positives sur chacune des deux directions. Le rapport k pourrait être alors positif ou négatif.

Plus généralement, si l'on se proposait d'avoir entre les deux cordes $\overline{M_1M} = u$, $\overline{M'_1M} = v$, considérées en grandeur et en signe, une relation donnée $\varphi(u, v) = 0$, on rapporterait la conique à deux demi-droites Ox , Oy parallèles aux directions positives données, et l'on aurait $\varphi\left(\frac{f'_x}{A}, \frac{f'_y}{C}\right) = 0$. Les intersections de cette courbe, dont l'ordre est le même que le degré de la fonction φ , avec la conique, donneraient les points cherchés.

2° *Sur une quadrique, trouver le lieu des points M tel que les trois cordes $\overline{M_1M} = u$, $\overline{M'_1M} = v$, $\overline{M''_1M} = w$, aboutissant à ce point et parallèles à trois demi-droites données, satisfassent à une relation donnée $\varphi(u, v, w) = 0$.*

Les axes Ox , Oy , Oz étant pris parallèles aux trois demi-droites, on aura

$$\varphi\left(\frac{f'_x}{A}, \frac{f'_y}{A'}, \frac{f'_z}{A''}\right) = 0.$$

L'intersection de cette surface avec la quadrique donnera le lieu demandé.

On tirera de là tous les cas particuliers que l'on voudra. Il est seulement bon de remarquer que la nouvelle surface est d'un ordre égal au degré de la fonction φ . Si celle-ci est linéaire, par exemple, le lieu cherché sera par conséquent une conique.

3° *Trouver sur une quadrique un point tel que les trois cordes u , v , w , définies ci-dessus, satisfassent à deux relations données $\varphi(u, v, w) = 0$, $\psi(u, v, w) = 0$.*

D'après ce qui précède, il faudra prendre les intersections des deux surfaces

$$\varphi\left(\frac{f'_x}{A}, \frac{f'_y}{A'}, \frac{f'_z}{A''}\right) = 0, \quad \psi\left(\frac{f'_x}{A}, \frac{f'_y}{A'}, \frac{f'_z}{A''}\right) = 0$$

avec la quadrique. Si m , n sont les degrés respectifs des fonctions ψ , φ , le nombre des solutions sera $2mn$.

Comme cas particulier très simple, soit à rechercher les points pour lesquels les trois cordes $\overline{M_1M}$, $\overline{M'_1M}$, $\overline{M''_1M}$ sont égales. Il vient alors

$$\frac{f'_x}{A} = \frac{f'_y}{A'} = \frac{f'_z}{A''},$$

et les deux points d'intersection de cette droite avec la quadrique sont les points cherchés. Si l'on demandait que les trois cordes fussent égales en longueur seulement, il faudrait affecter de doubles signes les expressions précédentes. Au lieu d'une droite on en aurait alors quatre; et au lieu de deux points on en aurait huit.

4° *Plan tangent à une quadrique.*

Au point M que nous avons considéré, le plan tangent est parallèle à celui qui a pour équation $Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z = k$. Si donc on porte sur les cordes $\overline{MM_1}$, $\overline{MM'_1}$, $\overline{MM''_1}$ des longueurs $\overline{MT_1}$, $\overline{MT'_1}$, $\overline{MT''_1}$, proportionnelles à $\frac{1}{f'_x}$, $\frac{1}{f'_y}$, $\frac{1}{f'_z}$, le plan $T_1T'_1T''_1$ sera parallèle au plan tangent, ou ce qui revient au même, la perpendiculaire à $T_1T'_1T''_1$ menée par M sera la normale à la surface. Il suffit pour cela de construire

$$\overline{MT_1} = \frac{h^2}{A \cdot \overline{MM_1}}, \quad \overline{MT'_1} = \frac{h^2}{A' \cdot \overline{MM'_1}}, \quad \overline{MT''_1} = \frac{h^2}{A'' \cdot \overline{MM''_1}}.$$

Dans le cas particulier des coordonnées rectangulaires, si l'on construit $\overline{MN_1} = \overline{A \cdot \overline{MM_1}}$, ... la diagonale du parallélépipède formé sur $\overline{MN_1}$, $\overline{MN'_1}$, $\overline{MN''_1}$, sera la normale en M à la quadrique.

4. — Il est facile de représenter géométriquement les dérivées partielles, alors que le point (x, y, z) considéré n'est pas situé sur la surface, comme nous l'avons supposé jusqu'à présent.

Reprenant pour cela le calcul que nous avons indiqué ci-dessus (2), nous avons identiquement

$$f(x, y, z) = F(x) = A(x - x_1)(x - x_2)$$

$$f'_x(x, y, z) = F'(x) = \frac{F(x)}{x - x_1} + \frac{F(x)}{x - x_2} = A(2x - x_1 - x_2).$$

Or, si $\overline{MM_1M_2}$ est une corde parallèle à Ox , passant par le

point M considéré, et coupant la surface en M_1 et M_2 , on a $x - x_1 = \overline{M_1M}$, $x - x_2 = \overline{M_2M}$. Par conséquent

$$\frac{f(x,y,z)}{A} = \overline{M_1M} \cdot \overline{M_2M}, \quad \frac{f'_x}{A} = \overline{M_1M} + \overline{M_2M}.$$

On aurait des relations analogues en coupant la surface par des droites parallèles à Oy et Oz .

Ceci nous donne incidemment une représentation géométrique de la fonction f , en même temps que de ses dérivées partielles, quand on y remplace les coordonnées x, y, z par celles d'un point quelconque. Cela nous permet, comme conséquence, d'obtenir les coefficients A, A', A'' de l'équation (ou du moins des quantités proportionnelles), quand on a les trois cordes M_1M_2M , $M'_1M'_2M$, $M''_1M''_2M$, qui vont concourir en M . Si nous construisons en effet

$$\begin{aligned} \overline{MM_1} \cdot \overline{MM_2} &= \pm \overline{MK}^2, \\ \overline{MM'_1} \cdot \overline{MM'_2} &= \pm \overline{MK}'^2, \\ \overline{MM''_1} \cdot \overline{MM''_2} &= \pm \overline{MK}''^2, \end{aligned}$$

on voit que A, A', A'' seront respectivement proportionnels à

$$\frac{1}{\pm \overline{MK}^2}, \quad \frac{1}{\pm \overline{MK}'^2}, \quad \frac{1}{\pm \overline{MK}''^2}.$$

Alors f'_x sera exprimé par $\frac{\overline{M_1M} + \overline{M_2M}}{\pm \overline{MK}^2}$, ou $\frac{2\overline{PM}}{\pm \overline{MK}^2}$, en appe-

lant P le milieu de la corde $\overline{M_1M_2}$; et de même pour les dérivées partielles f'_y, f'_z .

5. — Il nous est également possible d'arriver à une représentation géométrique de la dérivée du premier membre de l'équation d'une quadrique

$$f(x,y,z,t) = Ax^2 + \dots + Dt^2 = 0$$

par rapport à la variable d'homogénéité, lorsque cette équation a été rendue homogène.

A cet effet, nous écrirons ce premier membre $D(t-t_1)(t-t_2)$, t_1, t_2 étant des fonctions de x, y, z . D'autre part, on a aussi

$$f(x,y,z,t) = Dt^2 + t\varphi_1(x,y,z) + \varphi_2(x,y,z),$$

φ_1 et φ_2 étant des fonctions homogènes dont le degré est marqué par l'indice.

Si nous appelons α, β, γ les paramètres directeurs de la droite qui joint l'origine au point M , de coordonnées x, y, z , et ρ la longueur \overline{OM} , il vient

$$f(x, y, z) = D + \rho_1 \varphi_1(\alpha, \beta, \gamma) + \rho^2 \varphi_2(\alpha, \beta, \gamma).$$

Appelons ρ_1, ρ_2 les longueurs $\overline{OM_1}, \overline{OM_2}$, en grandeur et en signe, M_1, M_2 étant les intersections de la surface par la droite \overline{OM} ; et ρ étant connu, posons $\frac{\rho}{r} = s$; r désigne alors le rayon vecteur d'un point quelconque de \overline{OM} , et ρ_1, ρ_2 sont les valeurs particulières de r qui correspondent à M_1 et M_2 .

L'équation qui a pour racines ρ_1, ρ_2 est

$$D + r\varphi_1(\alpha, \beta, \gamma) + r^2\varphi_2(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

ou

$$D + \frac{r}{\rho} \varphi_1(x, y, z) + \frac{r^2}{\rho^2} \varphi_2(x, y, z) = 0$$

ou enfin

$$D \frac{\rho^2}{r^2} + \frac{\rho}{r} \varphi_1(x, y, z) + \varphi_2(x, y, z) = 0;$$

c'est-à-dire,

$$Ds^2 + s\varphi_1(x, y, z) + \varphi_2(x, y, z) = 0.$$

Cette équation étant identique avec l'équation en t , il s'ensuit que les deux racines t_1, t_2 sont $\frac{\rho}{\rho_1}, \frac{\rho}{\rho_2}$, ou $\frac{\overline{OM}}{\overline{OM_1}}, \frac{\overline{OM}}{\overline{OM_2}}$.

Le premier membre $f(x, y, z)$ de l'équation de la surface, qui s'obtient en faisant $t=1$ dans l'équation rendue homogène, a donc pour expression

$$D \left(1 - \frac{\overline{OM}}{\overline{OM_1}}\right) \left(1 - \frac{\overline{OM}}{\overline{OM_2}}\right) = D \frac{\overline{MM_1} \cdot \overline{MM_2}}{\overline{OM_1} \cdot \overline{OM_2}}.$$

Or, puisque $f(x, y, z, t) = D(t - t_1)(t - t_2)$, on a l'identité

$$f'_t(x, y, z, t) = D(2t - t_1 - t_2).$$

Cela nous donne pour l'expression cherchée de f'_t ,

$$D \left(2 - \frac{\overline{OM}}{\overline{OM_1}} - \frac{\overline{OM}}{\overline{OM_2}}\right) = D \left(\frac{\overline{MM_1}}{\overline{OM_1}} + \frac{\overline{MM_2}}{\overline{OM_2}}\right).$$

En définitive, si, sur la droite \overline{OM} , qui coupe la surface en M_1 ,

M_2 nous construisons le point H conjugué harmonique de O par rapport à $\overline{M_1 M_2}$, ce qui donne $\frac{1}{\overline{OM_1}} + \frac{1}{\overline{OM_2}} = \frac{2}{\overline{OH}}$, l'expression géométrique de f'_t sera

$${}_2D \frac{\overline{MH}}{\overline{OH}}.$$

Pour un point placé sur la quadrique, M_1 par exemple, l'expression serait ${}_2D \frac{\overline{M_1H}}{\overline{OH}}$, et pour l'autre ${}_2D \frac{\overline{M_2H}}{\overline{OH}}$. Il s'ensuit que le rapport des valeurs de f'_t répondant aux deux points M_1, M_2 est

$$\frac{\overline{M_1H}}{\overline{M_2H}} = - \frac{\overline{OM_1}}{\overline{OM_2}}.$$

6. — En résumant les résultats que nous venons d'obtenir, appliqués à un point quelconque, nous pouvons énoncer les propositions suivantes.

Si, dans le premier membre de l'équation d'une quadrique

$$f(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + \dots + D = 0,$$

et dans sa dérivée $f'_x(x, y, z)$ nous remplaçons les coordonnées x, y, z , par celles d'un point M ; si d'autre part, $\overline{MM_1 M_2}$, est une parallèle à Ox qui perce la surface en M_1, M_2 , nous aurons $f(x, y, z) = A \cdot \overline{MM_1} \cdot \overline{MM_2}$, $f'_x(x, y, z) = A (\overline{M_1M} + \overline{M_2M})$; et de même, bien entendu, pour les dérivées f'_y, f'_z .

Si, avec les mêmes notations, nous appelons P_1, P_2 , les points où la droite \overline{OM} perce la quadrique, nous aurons

$$f(x, y, z) = D \frac{\overline{MM_1} \cdot \overline{MM_2}}{\overline{OM_1} \cdot \overline{OM_2}}, \quad f'_t(x, y, z, t) = D \left(\frac{\overline{MM_1}}{\overline{OM_1}} + \frac{\overline{MM_2}}{\overline{OM_2}} \right).$$

7. — Essayons maintenant d'arriver à des figurations analogues pour les coniques rapportées à des coordonnées trilineaires, ou pour les quadriques en coordonnées tétraédriques. Nous nous bornerons à ce dernier cas, l'application aux coniques en résultant d'une façon évidente, et nous supposerons qu'il est fait usage de coordonnées barycentriques.

Soit $f(x, y, z, t) = Ax^2 + \dots = 0$ l'équation d'une quadrique

rapportée au tétraèdre ABCD. Désignons par x, y, z, t les coordonnées d'un point quelconque M de l'espace, et considérons la droite \overline{AM} qui perce la quadrique en M_1 et M_2 .

Proposons-nous de chercher les coordonnées de ces deux points M_1, M_2 . Nous pouvons prendre y, z, t pour trois coordonnées de chacun d'eux, et il n'y a à déterminer que la coordonnée x_1 pour M_1 et x_2 pour M_2 . Ces valeurs x_1, x_2 sont les racines de l'équation $Ax^2 + \dots = 0$, où y, z, t sont considérées comme données.

Or, nous avons les équipollences

$$(x + y + z + t) \overline{AM} = y \overline{AB} + z \overline{AC} + t \overline{AD},$$

$$(x_1 + y + z + t) \overline{AM}_1 = y \overline{AB} + z \overline{AC} + t \overline{AD},$$

$$(x_2 + y + z + t) \overline{AM}_2 = y \overline{AB} + z \overline{AC} + t \overline{AD}.$$

Dans ces relations, les coordonnées, par cela même qu'elles sont homogènes, n'interviennent en réalité que par leurs rapports. Nous pouvons les rendre absolues en supposant que nous nous imposions la condition

$$x + y + z + t = 1.$$

Dès lors, les relations ci-dessus nous donnent

$$\overline{AM} = \overline{AM}_1 (1 - x + x_1) = \overline{AM}_2 (1 - x + x_2);$$

de là,

$$x - x_1 = 1 - \frac{\overline{AM}}{\overline{AM}_1} = \frac{\overline{MM}_1}{\overline{AM}_1},$$

$$x - x_2 = 1 - \frac{\overline{AM}}{\overline{AM}_2} = \frac{\overline{MM}_2}{\overline{AM}_2}.$$

Le premier membre de l'équation de la quadrique, qui peut s'écrire

$$A(x - x_1)(x - x_2) = f(x, y, z, t)$$

a donc pour expression géométrique

$$A \frac{\overline{MM}_1 \cdot \overline{MM}_2}{\overline{AM}_1 \cdot \overline{AM}_2} \quad (1)$$

(1) Dans cette expression et dans quelques-unes des précédentes, nous employons la lettre A (et aussi B, C, D) pour déterminer, tantôt les sommets du

De l'identité précédente nous tirons

$$f'_x = \frac{f}{x - x_1} + \frac{f}{x - x_2} = A(x - x_1 + x - x_2),$$

ou

$$f'_x = A \left(\frac{\overline{MM}_1}{\overline{AM}_1} + \frac{\overline{MM}_2}{\overline{AM}_2} \right).$$

Cette dérivée partielle f'_x peut encore s'exprimer sous une autre forme. Si H_a indique le conjugué harmonique du sommet A par rapport au segment \overline{M}_1M_2 , nous avons

$$f'_x = A \left(2 - \frac{\overline{AM}}{\overline{AM}_1} - \frac{\overline{AM}}{\overline{AM}_2} \right) = 2A \left(1 - \frac{\overline{AM}}{\overline{AH}_a} \right) = 2A \frac{\overline{H}_aM}{\overline{H}_aA},$$

et aussi

$$f'_x = 2A \frac{\overline{MM}_1}{\overline{AM}_1} \cdot \frac{\overline{MM}_2}{\overline{AM}_2} \frac{\overline{H}'_aA}{\overline{H}'_aM},$$

si H'_a est le conjugué harmonique de M par rapport à \overline{M}_1M_2 .

Nous résumerons dans les deux propositions suivantes les résultats que nous venons d'obtenir:

Une quadrique étant rapportée, en coordonnées barycentriques, au tétraèdre ABCD, appelons x, y, z, t les coordonnées d'un point M de l'espace, la condition $x + y + z + t = 1$ étant remplie; soient M_1, M_2 les points de rencontre de \overline{AM} avec la surface, et H_a, H'_a les points conjugués harmoniques de A et de M par rapport à \overline{M}_1M_2 ; soit enfin $f = 0$ l'équation de la quadrique.

I. — Si dans la fonction f , on remplace les coordonnées courantes par celles du point M , le résultat de cette substitution sera

$$A \frac{\overline{MM}_1}{\overline{AM}_1} \cdot \frac{\overline{MM}_2}{\overline{AM}_2}.$$

le coefficient A étant celui de x^2 dans l'équation de la surface.

tétraèdre de référence, tantôt les coefficients de x^2, y^2, z^2, t^2 dans le premier membre de l'équation de la quadrique. Mais aucune confusion n'est possible, et il nous a paru au contraire que l'exposition n'aurait qu'à gagner en clarté à cette identité des notations.

Par conséquent

$$f(x, y, z) = A. \overline{M_1 M} . \overline{M_2 M} \dots \overline{M_p M}$$

$$f'_x(x, y, z) = A. \overline{M_1 M} \dots \overline{M_p M} \left(\frac{1}{\overline{M_1 M}} + \dots + \frac{1}{\overline{M_p M}} \right).$$

Si, en particulier, M est sur la surface, ce point coïncide avec l'un des points M_1, \dots, M_p , avec M_1 par exemple, et alors

$$f'_x(x, y, z) = A. \overline{M_2 M} . \overline{M_3 M} \dots \overline{M_p M}.$$

En général, si la moyenne proportionnelle des segments $\overline{MM_1}, \overline{MM_2}, \dots, \overline{MM_p}$ est \overline{MP} (en tenant compte du principe des signes, bien entendu, ce qui peut amener le point P à être imaginaire) et si H' est le centre harmonique des points M_1, \dots, M_p par rapport à M pris comme pôle, nous aurons

$$f(x, y, z) = A. \overline{PM}^p,$$

$$f'_x(x, y, z) = Ap. \frac{\overline{PM}^p}{\overline{H'M}}.$$

Il est bon de rappeler que le coefficient A peut être, soit un nombre constant, soit une fonction des coordonnées y et z du point M.

Si le point M est tel que la somme des inverses des segments $\overline{MM_1}, \dots, \overline{MM_p}$ soit nulle, on a $f'_x(x, y, z) = 0$; d'où une définition directe de la surface représentée par cette dernière équation en considérant x, y, z comme des coordonnées courantes.

Il est clair que l'on obtient des résultats analogues pour les autres coordonnées y, z .

9. — Cherchons, par extension des considérations indiquées au n° 5, à interpréter la dérivée f'_t du premier membre de l'équation d'une surface algébrique, par rapport à la variable d'homogénéité, lorsqu'on remplace les coordonnées courantes par celles d'un point M quelconque.

L'équation $f = 0$ peut s'écrire

$$Dt^p + \dots = 0,$$

ou

$$D(t - t_1) \dots (t - t_p) = 0,$$

p étant égal au degré n de la surface si celle-ci ne passe pas par l'origine, auquel cas D est une constante. Autrement, D sera une certaine fonction des coordonnées x, y, z .

Si nous voulons déterminer maintenant les intersections (autres que l'origine) d'une droite joignant l'origine au point M_1 de coordonnées x, y, z , nous pouvons écrire le premier membre, en groupant les termes homogènes,

$$\varphi_{n-p}(x, y, z) + \dots + \varphi_n(x, y, z),$$

et φ_{n-p} est identique à D .

Posant $x = \alpha\rho, y = \beta\rho, z = \gamma\rho$, et prenant pour inconnue le rapport $\frac{\rho}{r} = s$, en appelant r le rayon vecteur d'un point de OM qui devra se trouver sur la surface, nous obtenons, après avoir supprimé les $n - p$ racines nulles,

$$\frac{\rho^p}{r^p} \varphi_{n-p}(x, y, z) + \dots + \varphi_n(x, y, z) = 0,$$

ou

$$\varphi_{n-p}(x, y, z) \cdot s^p + \dots + \varphi_n(x, y, z) = 0.$$

Les équations en s et en t sont donc identiques, c'est-à-dire que les racines t_1, t_2, \dots, t_p représentent les rapports

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OM}_1}, \frac{\overline{OM}}{\overline{OM}_2}, \dots, \frac{\overline{OM}}{\overline{OM}_p},$$

les points M_1, M_2, \dots, M_p étant ceux où la droite \overline{OM} perce la surface.

Par suite, le premier membre de cette dernière, ou $f(x, y, z)$ a pour expression géométrique

$$D \left(1 - \frac{\overline{OM}}{\overline{OM}_1} \right) \dots \left(1 - \frac{\overline{OM}}{\overline{OM}_p} \right),$$

ou

$$D \frac{\overline{MM}_1 \dots \overline{MM}_p}{\overline{OM}_1 \dots \overline{OM}_p}.$$

On a en outre

$$f'_t(x, y, z, t) = f(x, y, z, t) \left[\frac{1}{t - t_1} + \dots + \frac{1}{t - t_p} \right],$$

c'est-à-dire, t devant être remplacé par l'unité,

$$f'_t = D \frac{\overline{MM_1} \dots \overline{MM_p}}{\overline{OM_1} \dots \overline{OM_p}} \left(\frac{\overline{OM_1}}{\overline{MM_1}} + \dots + \frac{\overline{OM_p}}{\overline{MM_p}} \right).$$

Si en particulier, le point M est situé sur la surface, en M_1 par exemple, l'expression se réduit à

$$D \frac{\overline{MM_2}}{\overline{OM_2}} \dots \frac{\overline{MM_p}}{\overline{OM_p}}.$$

10. — Considérons maintenant une surface rapportée, en coordonnées homogènes barycentriques, à un tétraèdre $ABCD$ de référence, et soit

$$f(x, y, z, t) = Ax^p + \dots = 0$$

son équation, ordonnée par rapport aux puissances de la coordonnée x . Si $p = n$ (l'ordre de la surface), A sera un coefficient numérique. Si $p < n$, A sera une fonction des trois autres coordonnées. En tous cas, l'équation en x aura p racines, c'est-à-dire que le premier membre pourra s'écrire

$$A(x - x_1) \dots (x - x_p).$$

Appelons x, y, z, t les coordonnées d'un point M , et M_1, M_2, \dots les points où \overline{AM} perce la surface. Supposons enfin que $x + y + z + t = 1$. Nous pouvons représenter par $(x_1, y, z, t), \dots$ les coordonnées des points M_1, \dots et il est évident que ces points sont au nombre de p , et que les valeurs x_1, \dots, x_p sont précisément les mêmes que les racines de l'équation en x , considérées ci-dessus. Exactement comme au n° 7, nous voyons aussi que pour un point M_i quelconque, nous avons

$$x - x_i = 1 - \frac{\overline{AM}}{\overline{AM_i}} = \frac{\overline{MM_i}}{\overline{AM_i}}.$$

Le premier membre de l'équation de la surface a donc pour expression géométrique

$$f = A \frac{\overline{MM_1} \dots \overline{MM_p}}{\overline{AM_1} \dots \overline{AM_p}},$$

et, exactement comme dans ce qui précède, nous avons aussi

$$f'_x = A \frac{\overline{MM}_1 \dots \overline{MM}_p}{\overline{AM}_1 \dots \overline{AM}_p} \left(\frac{\overline{AM}_1}{\overline{MM}_1} + \dots + \frac{\overline{AM}_p}{\overline{MM}_p} \right).$$

La quantité entre crochets peut encore s'écrire

$$p - \frac{\overline{MA}}{\overline{MM}_1} - \dots - \frac{\overline{MA}}{\overline{MM}_p},$$

ou

$$p \left(1 - \frac{\overline{MA}}{\overline{MH}'_a} \right) = p \frac{\overline{AH}'_a}{\overline{MH}'_a},$$

si H'_a est le centre harmonique des points M_1, \dots, M_p , par rapport au point M .

Nous obtenons donc, en définitive, pour l'expression de f'_x ,

$$Ap \frac{\overline{MM}_1 \dots \overline{MM}_p}{\overline{A}_1 M \dots \overline{AM}_p} \frac{\overline{H}'_a A}{\overline{H}'_a M}.$$

11. — En nous reportant aux résultats du n° 8, nous voyons que si, par rapport à un point quelconque $M(x, y, z)$, le centre harmonique des points où une parallèle menée par M à Ox perce la surface est à l'infini, on a

$$f'_x(x, y, z) = 0.$$

Cette conclusion est encore vraie si on l'étend à tous les points de rencontre, et non plus seulement aux points considérés, car les termes $\frac{1}{\overline{MM}_i}$ qu'on introduirait seraient nuls, dès lors que le point M_i s'éloignerait à l'infini.

Supposons qu'il en soit de même pour $f'_y(x, y, z)$ et $f'_z(x, y, z)$; et sans changer les directions des axes coordonnés, prenons le point M pour origine.

L'équation de la surface dans ce système ne contiendra évidemment plus les termes du premier degré en x, y, z . Si nous cherchons alors les points d'intersection de la surface avec une droite de direction quelconque (α, β, γ) issue de l'origine, nous obtiendrons une équation de la forme.

$$\rho^n (A\alpha^n + \dots) + \dots + \rho^2 (K\alpha^2 + \dots) + D = 0.$$

En appelant ρ_1, \dots, ρ_n les racines de cette équation, on a

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} + \dots + \frac{1}{\rho_n} = 0.$$

Donc, si le centre harmonique des points de rencontre par rapport à M est à l'infini dans trois directions distinctes, il en est de même pour toute droite passant par M. On peut dire d'un tel point que c'est un *centre harmonique* de la surface.

Comme les coordonnées du point M sont données par les équations $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, $f'_z = 0$, qui représentent en général des surfaces d'ordre $n - 1$, il s'ensuit qu'une surface du n^e ordre possède $(n - 1)^3$ centres harmoniques. Chacune des surfaces $f'_x = 0, \dots$ peut être considérée comme une surface diamétrale harmonique, en appelant ainsi le lieu des points jouissant de la propriété indiquée, pour un système de droites parallèles à une direction donnée.

En admettant que l'équation $f = 0$ soit complète, il est visible que le lieu des centres des moyennes distances des points d'intersection de la surface par des cordes parallèles à Ox est un plan, $f_{x^{p-1}} = 0$; mais, s'il en est ainsi pour les trois directions d'axes Ox , Oy , Oz , il ne s'ensuit plus que la même propriété subsiste pour une autre direction; on le reconnaît sans aucune peine en examinant l'équation de la surface dans cette hypothèse.

La véritable généralisation de la théorie des plans diamétraux et des centres se trouve donc plutôt dans la considération des centres harmoniques dont nous venons de parler, et qui pourrait mériter une étude à part.

Nous ferons remarquer en terminant que les centres harmoniques coïncident exactement dans les quadriques avec les centres dans le sens ordinaire du mot, parce que de $\frac{1}{M_1M} + \frac{1}{M_2M} = 0$, on tire $M_1M + M_2M = 0$; ce qui cesse d'être vrai lorsqu'il y a plus de deux points d'intersection.

C.-A. LAISANT.