EXTENSION AUX COURBES GAUCHES ET AUX SURFACES DES NOTIONS « TANGENTE », « SOUS-TANGENTE » ETC.

EXTENSION

AUX COURBES GAUCHES ET AUX SURFACES

DES NOTIONS « TANGENTE », « SOUS-TANGENTE » ETC.

---

1. Il est curieux que, à ce que je sache, dans aucun livre ne se trouve cette extension, qui cependant est très facile et peut introduire différents problèmes sur les courbes gauches et les surfaces. Nous nous proposons de signaler ici brièvement ces grandeurs, autant cartésiennes que polaires. Ces dernières sont en vérité assez compliquées (surtout en coordonnées polaires), mais les premières sont très courtes et très faciles.

2. On appelle, comme on sait, *sous-tangente, sous-normale, tangente et normale cartésiennes* d'une courbe plane, les grandeurs PT, PK, MT, MK qui ont respectivement pour expressions en coordonnées cartésiennes (axes orthogonaux) :

$$y\,\frac{dx}{dy},\quad y\,\frac{dy}{dx},\quad y\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2},\quad y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

ou, en introduisant les cosinus α et β de la tangente :

$$y\,\frac{\alpha}{\beta},\, y\,\frac{\beta}{\alpha},\, \frac{y}{\beta},\, \frac{y}{\alpha}.$$

(ces grandeurs se rapportent à l'axe des x) ; celles rapportées à l'axe des y se trouveront par la permutation des x et y (α, β).

3. On appelle de même *sous-tangente, sous-normale, tangente et normale polaires* d'une courbe plane les grandeurs OT, ON, MT, MN ayant pour expressions en coordonnées polaires :

$$\rho^2\,\frac{d\partial}{d\rho},\quad \frac{d\rho}{d\partial},\, \rho\sqrt{1+\rho^2\left(\frac{d\partial^2}{d\rho^2}\right)},\, \sqrt{\rho^2+\left(\frac{d\rho}{d\partial}\right)^2}.$$

I. Grandeurs cartésiennes

A. *Extension aux courbes gauches.*

4. On appellera dans une courbe gauche (ou, plus généralement, dans une courbe dans l'espace), *sous-tangente* de la courbe en un point M le segment TP compris entre le pied P de la coordonnée z et le point T où la tangente en M à la courbe coupe le plan des yx (ou des yz ou des zx). La *tangente* sera le segment MT, entre T et le point de contact M. Cela posé, on aura, du triangle rectangle MPT,

$$(1) \qquad \mathrm{TP} = z \operatorname{tang} \mathrm{TMP} = z\frac{\sqrt{1-\gamma^2}}{\gamma} = \frac{z\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\gamma},$$

ou, si l'on remplace les cosinus de la tangente par leurs valeurs,

$$(1') \qquad \mathrm{TP} = z\sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}.$$

On aura de même

$$(2) \qquad \mathrm{MT} = z\frac{1}{\cos \mathrm{TMP}} = \frac{z}{\gamma},$$

ou bien

$$(2') \qquad \mathrm{MT} = z\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+\left(\frac{dy}{dz}\right)^2}.$$

L'on peut aussi trouver les égalités (1′) et (2′) directement, à l'aide des coordonnées des points

$$\mathrm{P}(x, y, 0) \quad \text{et} \quad \mathrm{T}\left(\mathrm{X} = x - \frac{dx}{dz}z, \quad \mathrm{Y} = y - \frac{dy}{dz}z, \quad \mathrm{Z} = 0\right);$$

on voit ainsi que *l'expression de la sous-tangente restera la même en coordonnées obliques*, comme pour les courbes planes. Les *sous-tangentes* et *tangentes* par rapport aux plans des yz et zx seront évidemment

$$\mathrm{T'P'} = x\frac{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{\alpha}, \quad \mathrm{T''P''} = x\frac{\sqrt{\gamma^2+\alpha^2}}{\beta};$$

$$\mathrm{M'T'} = \frac{x}{\alpha}, \quad \mathrm{M''T''} = \frac{y}{\beta}.$$

5. On appellera *sous-normale principale* en M le segment NP compris entre le point P et le point d'intersection N de la normale principale avec le plan des xy. La *normale principale* sera le segment MN.

On aura donc, du triangle rectangle MPN,

$$\text{NP} = z \operatorname{tang} \text{NMP} = z \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \equiv z \frac{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}{\zeta}, \tag{3}$$

ou bien, en remplaçant ξ, η, ζ par leurs valeurs,

$$\text{NP} = z \frac{\sqrt{x''^2+y''^2}}{z''} \tag{3'}$$

(s étant la variable indépendante et les accents désignant les dérivées par rapport à s).

On a de même

$$\text{MN} = \frac{z}{\cos \text{NMP}} = \frac{z}{\zeta}, \tag{4}$$

ou bien

$$\text{MN} = z \frac{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}{z''}. \tag{4'}$$

On peut aussi déduire les formules (3') et (4') directement des coordonnées des points P (x, y, o) et N $\left(x - \frac{x''}{z''} z, y - \frac{y''}{z''} z, 0\right)$.

Les grandeurs NP, MN se rapportent au plan des xy, celles rapportées aux plans des yz et zx seront respectivement :

$$\left\{\begin{aligned} \text{N'P'} &= x \frac{\sqrt{\eta^2+\zeta^2}}{\xi}, \quad & \text{N''P''} &= y \frac{\sqrt{\zeta^2+\xi^2}}{\eta}; \\ \text{M'N'} &= \frac{x}{\xi}, & \text{M''N''} &= \frac{y}{\eta}. \end{aligned}\right.$$

6. Enfin, si l'on appelle *sous-binormale* le segment BP, entre le point P et l'intersection B de la binormale avec le plan des xy et *binormale* le segment MB, on aura de même

$$\text{BP} = z \operatorname{tang} \text{BMP} = z \frac{\sqrt{1-\nu^2}}{\nu} \equiv z \frac{\sqrt{\lambda^2+\mu^2}}{\nu}, \tag{5}$$

ou bien

$$\text{BP} = z \frac{\sqrt{(y'z''-y''z')^2+(z'x''-z''x')^2}}{x'y''-x''y'}, \tag{5'}$$

$$\equiv z \frac{\sqrt{(x''^2+y''^2+z''^2)^2-(x'y''-x''y')^2}}{x'y''-x''y'}, \tag{5''}$$

et

$$(6) \qquad MB = \frac{z}{\cos BMP} = \frac{z}{\nu},$$

ou bien

$$(6') \qquad MB = z\frac{\sqrt{(x'y''-x''y')^2+(y'z''-y''z')^2+(z'x''-z''x')^2}}{x'y''-x''y'},$$

$$(6'') \qquad = z\frac{\sqrt{x''^2+y''^2+z''^2}}{x'y''-x''y'}.$$

On pourra, comme auparavant, trouver aussi directement les formules (5′) et (6′), des coordonnées des points P $(x, y, 0)$ et B $\left(x - z, \frac{y'z''-y''z'}{x'y''-x''y'}\, y - z, \frac{z'x''-z''x'}{x'y''-x'y''}, 0\right)$.

Les grandeurs correspondantes B′P′, M′B′ et B″P″, M″B″, par rapport aux plans des yz et zx seront évidemment

$$\begin{cases} B'P' = \dfrac{x\sqrt{\mu^2+\nu^2}}{\lambda}, & M'B' = \dfrac{x}{\lambda}; \\ B''P'' = \dfrac{y\sqrt{\nu^2+\lambda^2}}{\mu}, & M''B'' = \dfrac{y}{\mu}. \end{cases}$$

B. *Extension aux surfaces* $[z = f(x, y)]$.

7. On appellera *sous-normale* d'une surface en un point M le segment NP compris entre le pied P de la coordonnée z sur le plan des xy et l'intersection N de la normale à la surface avec le plan des xy. La *normale* sera le segment correspondant MN du point de contact M à N. L'on pourrait considérer par rapport aux deux tangentes aux lignes de courbure de la surface (ou aux tangentes aux lignes asymptotiques des surfaces à courbures opposées), des quantités analogues que l'on nommerait *sous-tangentes* et *tangentes* ; mais leur expression analytique étant très compliquée, nous l'omettons, en nous bornant seulement à la *sous-normale* et la *normale*.

Du triangle rectangle MPN, on a

$$(7) \qquad NP = z \operatorname{tang} NMP = z\sqrt{p^2+q^2},$$

et

$$(8) \qquad MN = \frac{z}{\cos NMP} = z\sqrt{1+p^2+q^2}.$$

Les grandeurs correspondantes par rapport aux plans des yz et zx seront (permutation circulaire des $-p$, $-q$, 1).

$$\begin{cases} N'P' = x\sqrt{1+q^2}, \\ M'N' = x\dfrac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{-p}, \end{cases} \qquad \begin{cases} N''P'' = y\sqrt{1+p^2}, \\ M''N'' = y\dfrac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{-q}. \end{cases}$$

II. Grandeurs polaires

8. *Courbes gauches.* — Si l'on mène par le pôle O un plan P perpendiculaire au rayon vecteur, on appellera *sous-tangente* polaire le segment TO, entre le pôle O et l'intersection T de la tangente à la courbe avec le plan (P), et *tangente* polaire le segment MT ; de même si la normale principale et la binormale de la courbe coupant le plan (P) aux points N et B, NO et MN seront respectivement la *sous-normale principale* et la *normale principale polaires* BO et MB, la *sous-binormale* et la *binormale* polaires.

9. L'angle ω (OMT) du rayon vecteur avec la tangente sera

$$\cos\omega = \frac{xdx + ydy + zdz}{\rho ds} = \frac{d\rho}{ds},$$

d'où

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\sqrt{ds^2 - d\rho^2}}{d\rho} = \frac{\rho\sqrt{d\partial^2 + \sin^2\partial d\psi^2}}{d\rho};$$

on aura donc d'abord :

$$\text{(9)} \qquad TO = \rho\frac{\sqrt{ds^2 - d\rho^2}}{d\rho}, \qquad MT = \frac{\rho}{\cos\omega} = \frac{\rho ds}{d\rho}. \qquad \text{(10)}$$

10. L'angle φ (OMN) de la normale principale avec le rayon vecteur sera

$$\cos\varphi = \frac{(xx'' + yy'' + zz'')R}{\rho}, \qquad \operatorname{tang}\varphi = \frac{\sqrt{\rho^2 - R^2(\Sigma(xx''))^2}}{R.\Sigma(xx'')},$$

(R, rayon de courbure ; x'', y'', z'' dérivées secondes par rapport à la variable indépendante s).

Cette expression ne se transforme pas facilement en coordonnées polaires (à cause de R) ; il vaut donc mieux conserver l'expression *cartésienne de la sous-normale principale et de la normale principale polaires*, qui seront

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{NO} = \rho \operatorname{tang} \varphi = \sqrt{\Sigma(x^2)}\sqrt{\frac{\Sigma(x^2)\,\Sigma(x''^2)}{(\Sigma(xx''))^2} - 1}, &(11)\\ &\mathrm{MN} = \frac{\rho}{\cos\varphi} = \frac{\Sigma(x^2)\sqrt{\Sigma(x''^2)}}{\Sigma xx''}. &(12)\end{aligned}\right.$$

11. De même, on aura

$$\begin{aligned}\cos\chi\,(\equiv \cos \mathrm{OMB}) &= \frac{x\lambda + y\mu + z\nu}{\rho}\\ &\equiv \frac{\mathrm{R}}{\rho}\sum_{x,\,y,\,z}[x(y'z'' - y''z')] + \operatorname{tang}\chi\\ &= \frac{\sqrt{\rho^2 - \mathrm{R}^2(\Sigma[x(y'z'' - y''z')])^2}}{\mathrm{R}.\Sigma[x(y'z'' - y''z')]},\end{aligned}$$

expression qui, de même, ne se transforme pas élégamment en coordonnées polaires. On aura donc les expressions *cartésiennes des sous-binormale et binormale polaires :*

$$\left\{\begin{aligned} &\mathrm{BO} = \rho \operatorname{tang} \chi = \sqrt{\Sigma(x^2)}\sqrt{\frac{\Sigma(x^2).\,\Sigma(x''^2)}{\{\Sigma[x(y'z'' - y''z')]\}^2} - 1}, &(13)\\ &\mathrm{MB} = \frac{\rho}{\cos\chi} = \frac{\Sigma(x^2)\sqrt{\Sigma(x''^2)}}{\Sigma[x(y''z'' - y''z')]}. &(14)\end{aligned}\right.$$

12. Quant aux problèmes que l'on peut se proposer sur les grandeurs précédentes, il y aura en général de très difficiles à résoudre, mais en combinant adroitement les différentes grandeurs par rapport aux différents plans coordonnés, on pourra en trouver aussi de très faciles qui pourraient trouver place dans les livres d'enseignement.

N.-J. HATZIDAKIS (Athènes).