SUR QUELQUES CONSTRUCTIONS NOUVELLES DE LA PARABOLE

Autor(en): **Majcen, Dr G.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1901)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-4665

tives. Si l'on suppose que M soit un point du lieu, que l'on mène la bissectrice intérieure MD et la bissectrice extérieure MD′ du triangle BCM, que le sens BCM soit le sens positif, on a

$$\frac{\overline{\mathrm{CM}}}{\overline{\mathrm{MB}}} = \frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{DB}}} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{\mathrm{CM}}}{\overline{\mathrm{MB}}} = \frac{\overline{\mathrm{D'C}}}{\overline{\mathrm{D'B}}}.$$

Par suite si l'on détermine entre B et C le point D tel que $\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{DB}} = \frac{m}{n}$ et à l'extérieur de BC le point D′ tel que $\frac{\mathrm{D'C}}{\mathrm{D'B}} = \frac{m}{n}$, tout point M sera sur la circonférence décrite sur DD′ comme diamètre.

On démontrerait avec la même précision que tout point de cette circonférence est un point du lieu.

La démonstration du deuxième cas n'offre pas plus de difficulté, car on a :

$$\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\overline{\mathrm{BD}}} \text{ (négatif)} = \frac{m}{n} = \frac{\overline{\mathrm{CM}}}{\overline{\mathrm{BM}}}$$

et

$$\frac{\overline{\mathrm{CD'}}}{\overline{\mathrm{D'B}}} \text{ (négatif)} = \frac{m}{n} = \frac{\overline{\mathrm{CM}}}{\overline{\mathrm{BM}}} \text{ etc.}$$

E. Lemoine (Paris).

SUR QUELQUES CONSTRUCTIONS NOUVELLES
DE LA PARABOLE

Si nous employons les théorèmes de la Géométrie projective, qui résultent de la théorie des polaires réciproques de Poncelet, et si nous prenons en considération les théorèmes connus de Steiner, Reye, etc., nous pourrons construire une parabole d'une manière très simple en nous aidant d'un cercle fixe. Les constructions de cette nature nous permettent de tenir compte des rapports absolument métriques, et de les subordonner aux propriétés projectives.

1. Soient donnés deux faisceaux de droites A et O, où les droites correspondantes sont rectangulaires. Les centres des faisceaux sont les points extrêmes du diamètre d'un cercle k, qui passe par tous les points d'intersection des couples correspondants. Si nous coupons l'un des faisceaux O par une droite quelconque r, et si nous élevons aux points d'intersection de r avec O des perpendiculaires, les points de rencontre de celles-ci avec les droites correspondantes du faisceau A, seront les points d'une parabole.

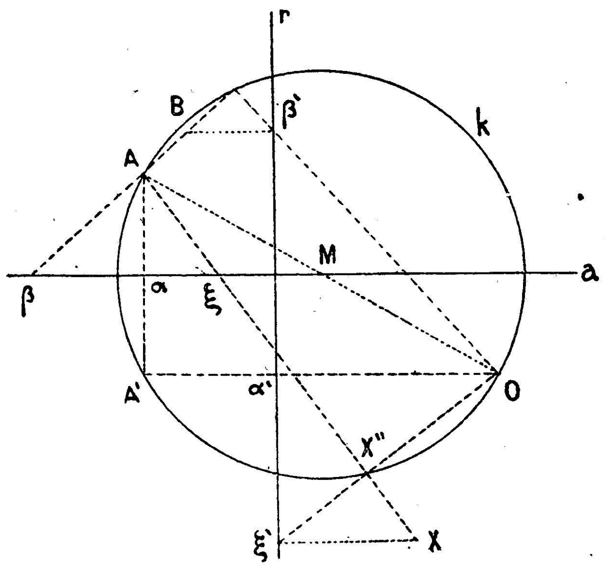

Fig. 1.

Pour construire un point quelconque X de cette parabole (fig. 1), on mène par O une droite quelconque OX'', rencontrant le cercle k en X'' et la droite r en ξ'. La droite AX'' et la perpendiculaire ξ'X élevée au point ξ' sur r se coupent en un point X de la parabole. Cette courbe passe par le point A et par les points de rencontre de la droite r et du cercle k.

J'ai déjà établi cette construction [1] très rigoureusement; et je ne veux donner ici, qu'une indication simple, pour démontrer que la courbe résultante est du deuxième degré, et qu'elle n'a qu'un point à l'infini. Le faisceau A sera projectif au faisceau des perpendiculaires correspondantes sur r. Le lieu des points de rencontre pour les droites correspondantes doit alors être du deuxième degré. Tirons en outre la droite par O parallèlement à la droite r, et cherchons la droite correspondante du faisceau A, alors le point X_∞ obtenu de la manière précédente sera à l'infini en direction, étant perpendiculaire sur la droite r. En employant ce théorème auxiliaire, nous allons démontrer quelques constructions de la parabole.

Si deux points quelconques A et B (fig. 1) et l'axe a de la parabole sont donnés, on prendra une droite quelconque r,

[1] *Journal pour les écoles moyennes croates :* Nastavni vjesnik, IX, 2.

étant perpendiculaire sur a, on projettera le point B sur cette droite r en β', puis on élèvera au point β' une perpendiculaire sur la droite de jonction AB, et l'on cherchera sur β'O un point O ayant à l'axe a, la même distance que le point A. Le cercle k, décrit sur $\overline{AO}$ comme diamètre, sera le cercle correspondant à la droite r, et on trouvera tous les autres points de la parabole, en s'aidant du cercle k et de la droite r de la même manière qu'auparavant.

Pour une certaine droite r il résultera un certain cercle k et vice versa.

2. Etant donnés un point B, le sommet A et l'axe a de la parabole, on trouvera aisément les autres points de cette courbe, si l'on choisit le cercle k, pour lequel la droite r passe par son centre M (fig. 2).

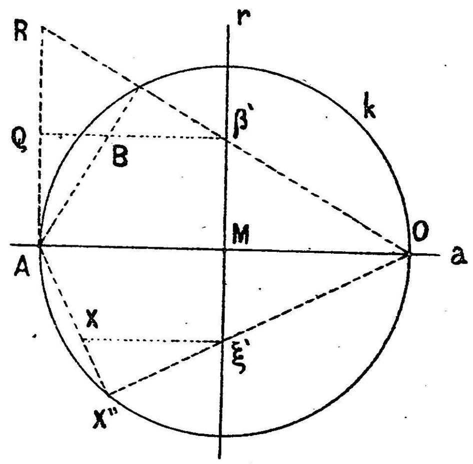

Fig. 2.

Nous élevons une perpendiculaire au point A sur a, et projetons le point donné B sur cette perpendiculaire en Q. Faisons $\overline{AQ} = \overline{QR}$, du point R abaissons une perpendiculaire sur AB, en rencontrant l'axe a en O. Sur AO comme diamètre décrivons un cercle k. La droite r, tracée par le centre M de ce cercle sera correspondante pour le même. Les droites RO, r et QB se couperont en un même point β', et la construction des autres points X se continuera comme auparavant.

Il faut encore remarquer que le cercle k touche toujours la parabole en quatre points, dont deux sont réunis en dernier cas en A, et les deux autres sont les points d'intersection de la droite r avec le cercle k.

3. Si le sommet A, un point quelconque V et l'axe a de la parabole sont donnés, on pourra construire la courbe à l'aide d'une droite r, étant perpendiculaire sur a au point A. D'une manière précédente on trouvera le point O sur a, et aussi par conséquent le cercle k correspondant (fig. 3).

En ce cas, tous les quatre points communs au cercle et à la parabole seront réunis au sommet A. Le cercle sera donc un cercle osculateur de la parabole en leur sommet.

Il est connu que l'abscisse du centre M d'un cercle osculateur pour le sommet A est égale à la moitié $\left(\frac{p}{2}\right)$ du demi-paramètre de la parabole. Etant alors donnés un point V quelconque, le sommet A et l'axe a de la parabole, on trouve le foyer F, en cherchant le point O comme dans l'article 2; on partagera la distance AO en quatre parties égales et le point extrême (F) de la première de celles-ci sera le foyer cherché.

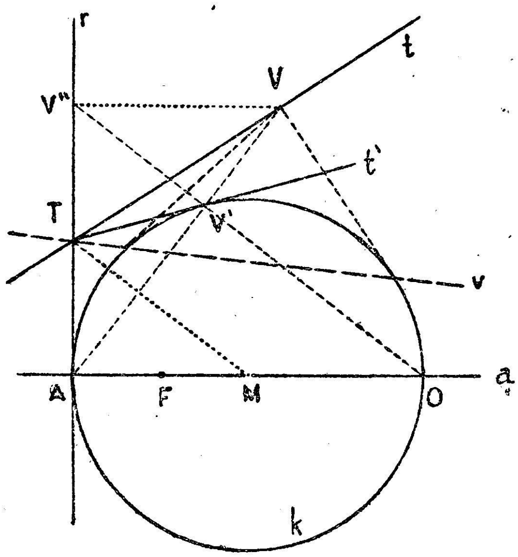

Fig. 3.

On remarque aisément, que le cercle k a pour rayon une longueur MA, étant égale à la moitié de la longueur du rayon du cercle k, pour lequel la droite r passe par son centre O. Il est aussi évident qu'on obtiendra de même manière le foyer F, si un autre cercle avec la droite correspondante est employé pour la construction de la parabole. Si la parabole a au sommet A, avec un cercle k, un contact simple (n'ayant que la tangente commune en A), les deux autres points de rencontre des courbes seront imaginaires, et la droite correspondante r d'un tel cercle touchera l'axe de la parabole à l'extérieur du demi-rayon A a.

De la manière, telle que nous venons de le remarquer, on peut construire la sécante idéale commune de la parabole et d'un cercle, ayant en A la même tangente.

4. Si l'on veut construire une tangente à la parabole en un point quelconque V (fig. 3), on tirera une droite MT par le centre M parallèlement à la droite OV″ laquelle est menée nécessairement pour construire le point V de la courbe); le point T d'intersection des droites MT et r est un point de la tangente t en V à la parabole.

Nous savons qu'une conique et un de ses cercles osculateurs sont dans une homologie, ayant le point de contact A comme centre et la tangente t en ce point comme axe d'homologie. Dans la figure 3, les points V et V′ sont correspondants (homologues), étant sur la même droite AV. Les tangentes en ces points V et V′ se couperont alors sur l'axe d'homologie en T. Puisque la droite r est une tangente au cercle k, la droite AV′ sera la polaire du point T par rapport au cercle k. La droite MT sera une parallèle à la droite OV′, car MT est perpendiculaire sur AV′, et les droites AV′ et OV′ sont rectangulaires.

Puisque le point V est situé sur la polaire du point T, ce point se trouvera nécessairement sur la polaire φ du point V, par rapport au même cercle k.

L'enveloppe de toutes les tangentes φ ainsi obtenues sera une ellipse, ayant le foyer F de la parabole comme centre, et la longueur A M comme petit axe.

Le cercle k sera aussi un cercle osculateur pour l'ellipse. La parabole sera donc une parabole osculatrice pour l'ellipse au sommet A.

(On voit donc aisément que cette ellipse est d'une telle forme, que le centre d'osculation pour le sommet A coïncide avec le sommet M.)

5. On peut démontrer, que la parabole et le cercle k sont dans une homologie involutive (¹), si la droite r passe par le centre M du cercle k. Nous avons déjà démontré de quelle manière on construit un tel cercle k et la droite r, si un point quelconque X de la parabole, l'axe a et le sommet A sont donnés.

Nous tirerons la droite AV (fig. 4), coupant le cercle k en V′, et la droite r en V_0. La droite de jonction OV′ rencontre r en V″ ainsi VV″ sera une parallèle à l'axe de la courbe. On mène la tangente t en A au cercle k, et la droite OV″ jusqu'au point d'intersection 2 avec t, puis VV″ jusqu'au point 4, la distance $\overline{14}$ sera égale à $\overline{42}$. Les points 1, 4, 2 et 3_∞, étant sur t à l'infini,

(¹) Sur les courbes involutives, voir : Reye, *Geometrie der Lage*, 3ᵉ édit., 2ᵉ part., p. 72-74.

sont quatre points harmoniques. Si l'on projette ces quatre points de V'' sur AV, on obtiendra quatre points correspondants A, V, V' et V_0, qui seront aussi harmoniques. Les projections orthogonales de ces points sur r donnent M, V'', V_1, $V_0 = -1$, et les projections de ceux-ci sur a de V font aussi M, V'''_∞, H, $A = -1$.

Parce qu'un de ces points V'''_∞ est à l'infini, on aura toujours $\overline{HA} = \overline{AM}$. La distance $\overline{HA}$ étant constante et égale au rayon du cercle k_r le point H sera fixe pour tous les points de la parabole cherchée.

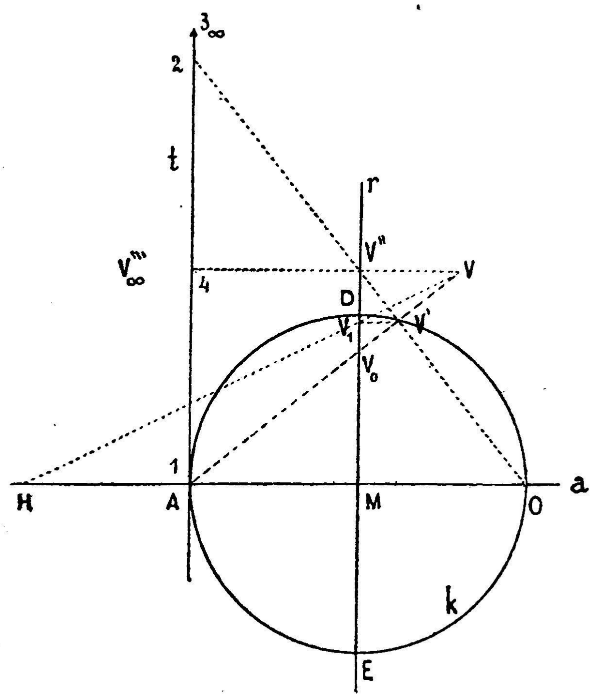

Fig. 4.

Un point quelconque de la courbe pourra donc se construire de la manière simple suivante :

Une droite quelconque AV, menée par A, coupe le cercle k en V'. Du point V' on abaisse une perpendiculaire sur la droite r, la coupant en V_1. Faisons $\overline{AH} = -\overline{AM}$, joignons les points H et V_1 par une droite qui coupera AV en V; ce point sera un point de la parabole.

En général, chaque point V de la courbe sera le quatrième point harmonique pour trois points A, V' et V_0, où A, V' et V_0, V sont conjugués. Quand les points V_0 et V' coïncident en D sur r, le quatrième point harmonique V viendra aussi en D, c'est-à-dire la parabole passe par les points de rencontre de la droite r avec le cercle k D et E (voir l'art. 2).

La courbe, obtenue de cette manière comme correspondant à un cercle dans une homologie involutive, ne peut être qu'une parabole, car seulement sur la droite Aa (menée par A) le quatrième point harmonique pour A, M et O sera à l'infini, et la courbe ne possède qu'un point à l'infini.

6. Nous expliquerons une autre construction de la parabole, en nous aidant de nouveau du cercle k et de la droite r, tirée par le centre M (fig. 5).

Traçons du point A une droite quelconque AV, coupant r en V_0, et k en V'.

Si l'on mène $V'O$, puis V_0V_2 parallèlement à l'axe a, la droite de jonction des points V_2 et M (en V_2 se coupent $V'O$ et V_0V_2) sera une droite rencontrant AV en V, c'est-à-dire en un point de la parabole. On prouvera cette construction par le mode suivant.

Nous avons déjà vu, que les points M, V_0, V_1 et V'' sont quatre points harmoniques. Les projections (parallèles) de ces points sur la droite $V''O$ (ou OV') sont aussi quatre points harmoniques O, V_2, V', V''. Projetons ces quatre points du point V sur l'axe a, et nous aurons quatre points harmoniques. Un de ceux-ci coïncidera avec O, l'autre avec A (parce que V' se trouve sur AV). Le troisième (V'''_∞) sera à l'infini, car VV'' est parallèle à l'axe a, alors le quatrième M partagera la distance $\overline{AO}$ en deux parties égales. La droite de jonction VV_2 passera donc par le centre M du cercle k, et la construction précédente est déjà prouvée.

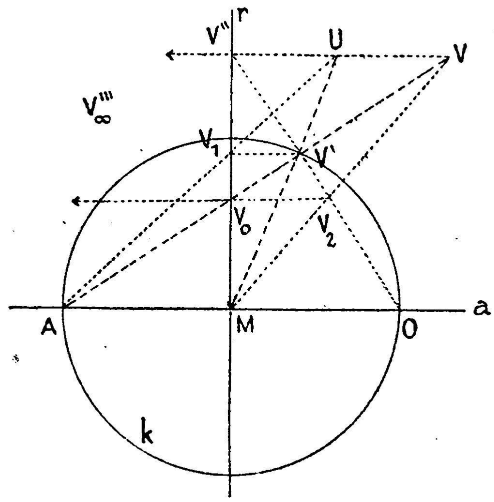

Fig. 5.

Le quadrilatère complet $MV_0V'V_2$ a deux côtés opposés, MV_2 et V_0V', qui se coupent en V, et deux autres V_2V' et V_0M se rencontrant en V''. Les côtés MV' et V_2V_0 couperont donc la droite VV'' en deux points U et V'''_∞. L'un V'''_∞ de ceux-ci sera à l'infini (parce que la droite VV'' est parallèle à V_2V_0); il suit de là, que le côté MV' et la droite VV'' se rencontrent en un point U, qui est le milieu de la longueur $\overline{VV''}$.

On peut donc simplifier la construction précédente de la manière suivante :

On mènera par O une droite quelconque, coupant le cercle k en V', et la droite r en V''. On joindra M au point V', on élèvera en V'' une perpendiculaire sur r, et l'on fera $\overline{V''U} = \overline{UV}$. Le point trouvé V appartient à la parabole. On prouve aisément qu'on a toujours $UV'' = UV'$ et $UV' = UV$.

Dr G. Majcen (Esseg, Slavonie).