VI

Donc

$$r_{k+1} + b = (r_k - b) - p_{k+1} \cdot n_{k+1}.$$

En outre,

$$r_{k+2} = r_{k+1} + 2b - p_{k+2} \cdot n_{k+2}$$

et

$$r_{k+2} - b = (r_{k+1} + b) - p_{k+2} \cdot n_{k+2}.$$

C. q. f. d.

On arrivera donc une fois à une valeur

$$x_\lambda = \frac{\mathrm{M} + \sqrt{\mathrm{A}}}{n_{\lambda+1}}, \text{ telle que } \mathrm{M} < b.$$

Cette valeur donnera :

$$x_{\lambda+1} = \frac{\sqrt{\mathrm{A}} + (b - r_{\lambda+1})}{n_{\lambda+2}},$$

une irrationnelle de la forme y ou y' qui se développe en fraction continue périodique simple, car $n_{\lambda+1} < 2b$,

$$r_{\lambda+1} < b$$

et

$$x_{\lambda+1} > 1.$$

Le radical $\sqrt{\mathrm{A}}$ dans x_λ ne saurait être négatif, car il entraînerait une irrationnelle négative, ce qui est impossible, et le raisonnement subsiste pour

$$\mathrm{V}_1 = \frac{\lambda - \sqrt{\mathrm{A}}}{n_1}.$$

Il en résulte la loi suivante :

Les irrationnelles de la forme $\mathrm{V}_1 = \frac{\lambda \pm \sqrt{\mathrm{A}}}{n_1}$ *ou* $\mathrm{V}_2 = \frac{\lambda \pm \sqrt{\mathrm{A}}}{m_1}$ *se développant en fractions continues périodiques mixtes ; la partie irrégulière a un nombre indéterminé mais limité de quotients incomplets.*

VI

Ces théories appliquées aux racines des équations du 2e degré nous conduisent à une forme nouvelle plus complète du théorème de Lagrange.

Prenons les équations à coefficients entiers

$$ax^2 \pm bx - c = 0$$

et

$$ax_2 \pm bx + c = 0.$$

Les racines de la 1re sont :

$$x' = \frac{\mp b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} \quad x'' = \frac{\mp b - \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$$

On a $A = b^2 - 4\,ac$; en faisant $\lambda = b$, $2\,a = m$; $2\,c = n$, on écrit :

$$x_1' = \frac{\sqrt{A} - \lambda}{m}$$

et

$$x_2' = \frac{\sqrt{A} + \lambda}{m}$$

$$x_1'' = -\frac{\sqrt{A} + \lambda}{m} \quad x_2'' = -\frac{\sqrt{A} - \lambda}{m}$$

On voit donc que, si les deux racines d'une équation sont toutes deux en valeur absolue plus grandes ou plus petites que l'unité, ces irrationnelles sont de la forme t. Elles seront de la forme y ou z, si une des racines est en valeur absolue plus grande que 1, tandis que l'autre est plus petite.

Les racines de la seconde équation sont :

$$x' = \frac{\mp b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

et

$$x'' = \frac{\mp b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Avec la substitution, on trouve

$$x_3' = -\frac{\lambda - \sqrt{A}}{m}, \quad x_4' = \frac{\lambda + \sqrt{A}}{m},$$

$$x_3'' = -\frac{\lambda + \sqrt{A}}{m}, \quad x_4'' + \frac{\lambda - \sqrt{A}}{m},$$

Les racines sont toutes de la forme V.

THÉORÈME. — *Toute équation du deuxième degré à coefficients entiers, dont les racines sont réelles et irrationnelles donne pour ces racines deux fractions continues périodiques.*

Elles sont périodiques mixtes, de même signe, avec partie irrégulière indéterminée, mais limitée quand c est positif.

Elles sont périodiques mixtes, de signes contraires, avec un seul quotient incomplet à la partie irrégulière quand c est négatif et quand les valeurs absolues des racines sont toutes deux plus grandes que 1, *ou plus petites que* 1.

Elles sont périodiques simples et de signes contraires quand c est négatif et quand la valeur absolue d'une des racines est supérieure à l'unité alors que la valeur absolue de l'autre est inférieure à l'unité.

Dans ce cas, la période de l'une est formée des quotients incomplets de l'autre pris dans l'ordre renversé.

VII

Ces irrationnelles permettent de donner également une nouvelle démonstration du développement de Legendre pour les racines carrées des nombres entiers.

Soit à développer $\sqrt{A}$: Nous poserons :

$$A - b^2 = n_1 . 1.$$

b^2 étant le plus carré parfait.

Les irrationnelles $\frac{\sqrt{A}+b}{1}$ et $\frac{\sqrt{A}+b}{n}$ seront de la forme y et y' et nous aurons :

$$(\alpha) \quad \frac{\sqrt{A}+b}{1} = 2b + \frac{\sqrt{A}+b}{1} = 2b + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{A}+b}{n}}.$$

La période correspondant à la 1re irrationnelle s'écrira

$$y = \frac{\sqrt{A}+b}{1} = [2b, b_1, b_2, \ldots b_{p-1}, b_p ; 2b, \ldots].$$

Celle correspondant à la 2e, s'écrira par raison de symétrie

$$y' = \frac{\sqrt{A}+b}{n} = [b_p, b_{p-1}, \ldots, b_2, b_1, 2b ; b_p \ldots].$$