II

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **3 (1901)**

Heft 1: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

En outre, nous pourrons écrire :

$$(4) \qquad A - (b - r_p)^2 = n_p \left\{ n_{p-1} - k_{p-1} (r_{p-1} - r_p) \right\} = n_p \cdot n_{p-1}$$

avec

$$n_{p+1} \text{ pos.} < 2b.$$

Puisque les conditions admises étaient vraies pour les termes d'indices 1) et 2), elles sont générales, et la formule (3) donne le terme général du développement ; nous pourrons énoncer en outre les remarques suivantes :

a) : Les quotients complets x_1, $x_2 \ldots$, x_p, sont positifs et > 1.

b) : Les quotients incomplets k_1, $k_2 \ldots$, $k_p \ldots$, sont entiers et positifs.

c) : Les diviseurs n_1, $n_2 \ldots$, $n_p \ldots$, sont entiers, positifs et $< 2\,b$.

d) : Les restes sont tous $< b$.

e) : Les restes sont plus petits que le diviseur correspondant et que le diviseur suivant ; c'est-à-dire :

$$r_p < n_p$$

et

$$r_p < n_{p+1}$$

car on peut écrire :

$$A - (b - r_p)^2 = n_{p+1} \cdot n_p = n_1 m_1 + r_p (2b - r_p)$$

et

$$n_{p+1} = \frac{n_1 \cdot m_1}{n_p} + r_p \cdot k_p + \frac{r_p \cdot r_{p-1}}{n_p}.$$

Donc

$$n_{p+1} > r_p.$$

Il en résulte donc que l'on a :

$$(5) \qquad y = k_1 + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \ldots$$

C'est une fraction continue illimitée. On obtient un résultat analogue en développant y'.

II

Les quotients incomplets sont liés entre eux par une périodicité qui découle des deux théorèmes suivants :

Théorème I. *Si dans le développement de y, on rencontre deux diviseurs $n_\mu . n_{\mu+1}$, tels que*

$$n_\mu = n_\lambda$$
$$n_{\mu+1} = n_{\lambda-1}$$

$n_{\lambda-1} . n_\lambda$ étant un produit précédemment obtenu, tous les diviseurs qui suivent $n_{\mu+1}$ sont la répétition dans l'ordre inverse des diviseurs qui précèdent $n_{\lambda-1}$.

La même loi régit les quotients incomplets.

On déduit :

$$n_\mu . n_{\mu+1} = n_\lambda . n_{\lambda-1},$$

puis d'après (2)

$$r_{\lambda-1} = r_\mu .$$

Ceci donne :

$$\frac{2b - r_{\lambda-1}}{n_{\lambda-1}} = k_{\lambda-1} \text{ reste } r_{\lambda-2} \text{ (Voy. remarque } e\text{).}$$

$$\frac{2b - r_\mu}{n_{\mu+1}} = k_{\mu+1} \text{ reste } r_{\mu+1} \text{ (Voy. remarque } e\text{).}$$

Donc

$$k_{\lambda-1} = k_{\mu+1}$$

et

$$r_{\mu+1} = r_{\lambda-2}.$$

En appliquant le même raisonnement aux termes qui précèdent, soit :

$$\frac{2b - r_{\lambda-1}}{n_\lambda} = k_\lambda \text{ reste } r_\lambda$$

$$\frac{2b - r_\mu}{n_\mu} = k_\mu \text{ reste } r_{\mu-1}$$

puis en continuant dans les deux directions, on arrive évidemment aux tableaux de récurrence suivants :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{c|c|c} \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ n_{\lambda+1} = n_{\mu-1} & k_{\lambda+1} = k_{\mu-1} & r_{\lambda+1} = r_{\mu-2} \\ n_\lambda = n_\mu & k_\lambda = k_\mu & r_\lambda = r_{\mu-1} \\ n_{\lambda-1} = n_{\mu+1} & k_{\lambda-1} = k_{\mu+1} & r_{\lambda-1} = r_\mu \\ n_{\lambda-2} = n_{\mu+2} & & r_{\lambda-2} = r_{\mu+1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{array} \right.$$

C. q. f. d.

I. Corollaire. — *Si l'on a une fois deux diviseurs consécutifs égaux :*

$$n_p = n_{p+1},$$

la symétrie s'établit à partir de ces termes.

On peut alors poser :

$$\frac{2b - r_p}{n_p} = k_p \text{ reste } r_{p-1} \text{ (Voy. } e\text{).}$$

$$\frac{2b - r_p}{n_{p+1}} = k_{p+1} \text{ reste } r_{p+1} \text{ (Voy. } e\text{).}$$

D'où :

$$k_p = k_{p+1}$$

et

$$r_{p-1} = r_{p+1}.$$

Cette dernière égalité donne :

$$n_{p-1} = n_{p+2}$$

et

$$n_p = n_{p+1}.$$

On retombe alors dans le théorème I, et la symétrie est établie. C. q. f. d.

II. Corollaire. — *Si l'on a :*

$$n_{p-1} = n_{p+1},$$

cette relation entraîne la symétrie des termes.

Dans ce cas, la formule (3) donne :

$$n_{p+1} = n_{p-1} - k_p\,(r_{p-1} - r_p);$$

il en résulte :

$$r_{p-1} = r_p$$

puis :

$$\frac{2b - r_{p-1}}{n_{p-1}} = k_{p-1} \text{ reste } r_{p-2},$$

$$\frac{2b - r_p}{n_{p+1}} = k_{p+1} \text{ reste } r_{p+1}.$$

Les quotients et les restes sont égaux, et l'on en tire :

$$n_{p-2}.\ n_{p-1} = n_{p+1}.\ n_{p+2},$$

relation qui nous ramène à un cas particutier du théorème I.

C. q. f. d.

Théorème II. — *Si dans le développement de y, on trouve un produit $n_{\mu}.\, n_{\mu+1}$, tel que l'on ait :*

$$n_{\mu} = n_{\lambda}$$
$$n_{\mu+1} = n_{\lambda+1}$$

ou $n_{\lambda}.\, n_{\lambda+1}$ est un produit précédemment obtenu, les valeurs n_{μ} et $n_{\mu+1}$, font partie d'une période qui est la répétition de celle à laquelle appartiennent les diviseurs n_{λ} et *$n_{\lambda+1}$, et cette période commence avec le premier diviseur.*

Les quotients incomplets suivent la même loi.

Ces valeurs donnent d'abord :

$$r_{\lambda} = r_{\mu},$$

desquels on déduit comme précédemment

$$k_{\mu} = k_{\lambda}$$

puis

$$r_{\lambda-1} = r_{\mu-1}$$

ou

$$k_{\mu+1} = k_{\lambda+1}$$

et

$$r_{\mu+1} = r_{\lambda+1}.$$

En continuant comme au théorème I, on arrive à établir des tableaux de récurrence qui remontent évidemment jusqu'aux premiers termes employés :

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \cdots\cdots \\ k_{\lambda-1} = k_{\mu-1} \\ k_{\lambda} = k_{\mu} \\ k_{\lambda+1} = k_{\mu+1} \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots \end{array}\right.$$

On forme de la même manière des tableaux analogues avec les diviseurs n et les restes r.

C. q. f. d.

Théorème III.—*Les valeurs $y = \dfrac{\sqrt{A} + \lambda}{n_1}$ et $y' = \dfrac{\sqrt{A} + \lambda}{m_1}$, déduites de $A - \gamma^2 = n_1 . m_1$ et toutes deux > 1 donnent des fractions continues périodiques simples.*

En effet, supposons formé le tableau des restes $A - \lambda^2$, décomposés en produits de deux facteurs $< 2b$, de toutes les manières possibles. Le calcul des termes conduit d'un produit à un autre d'après la formule (2), et comme ils sont en nombre limité, on retrouvera une fois un diviseur n_λ égal à un autre n_μ déjà obtenu, sans avoir de produit nouveau permettant de continuer le développement.

On devra donc recourir aux produits

$$n_\mu . n_{\mu+1} \tag{α}$$

ou

$$n_\mu . n_{\mu-1}. \tag{β}$$

Le produit (α), d'après le théorème II, donne une répétition portant sur tous les termes depuis le premier. Si la rencontre a lieu pour la première fois, il faut donc que les termes n_μ ou n_λ soient égaux au premier. On obtient dans ce cas, une fraction continue périodique simple, car d'après le même théorème, le $(p+1)^e$ terme de la 2^e réduite est égal au $(p+1)^e$ de la 1^{re}, et au 1^{er} de la 2^e, si p est le nombre des termes de la période, c'est donc la 3^e période qui commence et ainsi de suite.

Le produit (β) entraînerait, d'après le théorème I, une symétrie qui suppose une répétition de termes antérieure.

Si le terme ou le développement est arrêté *pour la première fois* n'est pas égal au premier, on ne peut continuer le développement, d'après le théorème II, qu'en prenant le dernier produit comme produit nouveau, ce qui suppose :

$$n_{\mu+1} = n_{\mu-1}. \tag{γ}$$

Le corollaire II montre que la suite des termes est symétrique avec première partie.

Au cas où l'on aurait eu :

$$n_\mu = n_{\mu-1} \tag{δ}$$

le développement continue d'après le corollaire I en formant également une symétrie.

Dans ces deux dernières alternatives, la suite des termes est encore arrêtée comme précédemment, mais on retombe dans l'une des alternatives (γ) ou (δ), car un produit de la forme (α) entraînerait quand même une symétrie d'après le théorème I. Soit A le 1^{er} terme et A′ le 2^e ; on a eu A′ pour le $(\lambda - 1)^e$ puis A pour le λ^e, si à partir du $(p)^e$ terme on retrouve A pour le $(p+1)^e$, puis A′ pour le $(p+2)^e$, c'est qu'il y a symétrie entre le λ^e et le p^e (Théorème I).

Il résulte de ceci, que la fonction continue est périodique simple, sans symétrie ou avec une symétrie double.

La symétrie peut se représenter schématiquement comme suit :

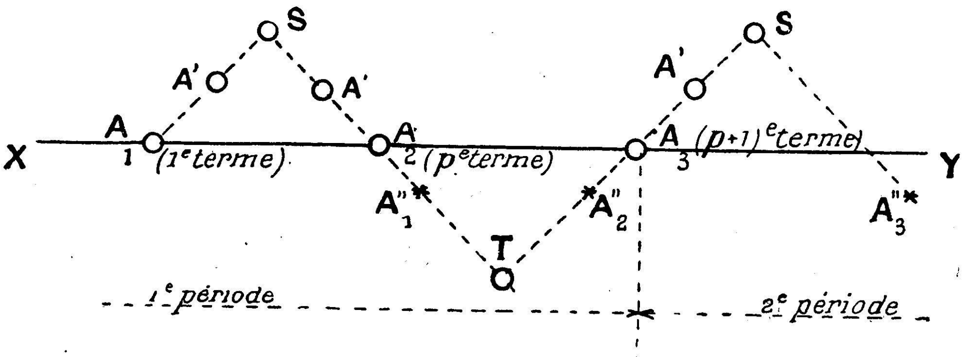

Fig. 1.

Le point S sera le premier sommet de la symétrie résultant de (γ) ou (δ), et T sera le sommet formé au second arrêt du développement.

Théorème IV. — *Les quotients incomplets de y' sont formés par ceux de y, puis dans l'ordre inverse.*

Soit p le nombre des quotients incomplets ; les éléments de la 2^e période donnent :

$$k_1 = k_{p+1} \; ; \; k_2 = k_{p+2},$$

et de même pour les valeurs n et r (Théorème II).

On a :

$$x_{p-1} = k_p + \frac{\sqrt{A} - (b - r_p)}{n_p} = k_p + \frac{1}{x_p},$$

mais, à cause de la périodicité,

$$x_p = y.$$

Donc

$$x_p = y = \frac{\sqrt{A} + b - r_p}{n_{p-1}} = \frac{\sqrt{A} + \lambda}{n_1}$$

et

$$b - r_p = \lambda.$$

Il en résulte

$$n_p = m_1.$$

et

$$y' = \frac{\sqrt{A} + b - r_p}{n_p} = k_p + \frac{1}{x_1'},$$

$$x_1' = \frac{\sqrt{A} + b - r_{p-1}}{n_{p-1}} = k_{p-1} + \frac{1}{x_2'},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x'_{p-1} = \cdots\cdots = k_1 + \frac{1}{y'}.$$

Cette propriété des derniers éléments nous donne donc les quotients incomplets de y' d'après ceux de y et l'on a :

$$(8) \qquad y = k_1 + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \cdots + \frac{1}{k_p} + \frac{1}{y}$$

$$(9) \qquad y' = k_p + \frac{1}{k_{p-1}} + \cdots + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_1} + \frac{1}{y'}$$

C. q. f. d.

On peut observer que le dernier quotient k_p marqué A''_2 au schéma d'une symétrie se retrouve en A''_1 et que c'est en ce point que commencerait la 2ᵉ fraction, la première commençant en A_1 sur l'axe $x\,y$ [1].

III

Du développement des irrationnelles précédentes, on déduit celui des valeurs :

$$z = \frac{\sqrt{A} - \lambda}{n_1}$$

et

$$z' = \frac{\sqrt{A} - \lambda}{m_1}$$

(1) Voir *Comptes rendus*, nº 4, t. CXXVIII, L. Crelier.